Задача синтезу в теорії керування

Башняков О.М., Пічкур В.В.

2012

УДК 517.977

Рецензенти:
доктор технічних наук, професор Гаращенко Ф.Г. (Київський національний університет імені Тараса Шевченка),
доктор фізико-математичних наук, професор Наконечний О.Г. (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

Рекомендовано до друку вченою радою факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол №7 від 12 березня 2012 р.)

Башняков О.М., Пічкур В.В. Задача синтезу в теорії керування: Навчальний посібник. - К.: Вид-во "Сталь", 2012. - 116 с.

Посібник висвітлює сучасні підходи до розв'язування задачі синтезу в теорії керування. Викладено основи методу динамічного програмування, методу послідовного аналізу варіантів, достатні умови оптимальності Кротова, основи методу демпфування і теорії стабілізації.

Посібник розраховано на студентів старших курсів, що навчаються за напрямками: математика, прикладна математика, інформатика, а також на фахівців з теорії керування.

Зміст

Вступ

При розв'язуванні задач керування складними технічними системами за умов невизначеності виникає необхідність в побудові керування, яке б дозволяло досягти поставленої мети для довільного можливого положення об'єкту керування. Подібні постановки виникають при створенні автоматичних систем керування літальними апаратами, в задачах оптимального керування пучками заряджених частинок, при проектуванні автоматизованих систем керування виробничими процесами тощо. Вони є надзвичайно складними, їх розв'язання базується на застосуванні підходів з різних областей математики.

Як приклад, розглянемо задачу гасіння кутових швидкостей при обертанні твердого тіла навколо центру мас. Така постановка виникає при побудові автоматизованих систем керування літальними апаратами. Математична модель записується за допомогою системи диференціальних рівнянь Ейлера і має вигляд [21]

$$\mathcal{J}\frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) \times \mathcal{J}\omega(t) = u(t). \tag{1}$$

Тут $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$ – вектор кутових швидкостей, $\mathcal{J}$ – тензор інерції, який є додатновизначеною симетричною матрицею розмірності 3×3, $u = (u_1, u_2, u_3)^*$ – вектор керуючих параметрів, що відповідає моментам зовнішніх сил, які діють на тіло, $u \in \mathcal{U}$, де $\mathcal{U}$ – множина допустимих керувань з $\mathbb{R}^3$, $t \geq 0$. В багатьох випадках початковий стан системи (1) відомий з деякою точністю, або взагалі не відомий. Тому постає задача про знаходження допустимого керування, що забезпечує перевід системи (1) з **довільного** положення $\omega(0)$ в окіл початку координат.

Оскільки початкове положення системи (1) заздалегідь невідоме, то функція керування залежить від фазових змінних. Це означає, що керування системою (1) здійснюється в класі керувань з оберненим зв'язком. Одержана постановка є прикладом задачі **синтезу керування** системи (1). Разом з тим, якщо потрібно перевести систему (1) з довільного положення на термінальну множину у найшвидший спосіб, то виникає задача синтезу оптимального за швидкодією керування.

Достатньо загальна постановка задачі синтезу може бути сформульованою так. Розглянемо систему керування вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(x,t), t), \tag{2}$$

де x – n-вимірний вектор стану, u – m-вимірний вектор керування, функція керування $u(x,t)$ є вимірною за t і неперервною за x та належить компакту $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $t \geq t_0$, $f(x,u,t)$ – n-вимірна неперервна функція, при цьому при допустимому керуванні $u = u(x,t)$ мають місце умови існування, єдиності і продовжуваності розв'язку задачі Коші для системи (2)[1].

Нехай $M \subset \mathbb{R}^n$ – множина кінцевих станів системи (2), яка називається також термінальною множиною. Приклад, що розглядався вище, показує, що початкове положення системи керування може бути невідомим. Має місце таке означення.

Означення 1. *Задача синтезу керування системи* (2) *полягає у знаходженні допустимого керування з оберненим зв'язком* $u = u(x,t)$, *такого, що розв'язки системи диференціальних рівнянь* (2) *в деякий момент часу* T *попадають на термінальну множину* M, *тобто*

$$x(T) \in M.$$

Керування $u(x,t)$, *яке розв'язує задачу синтезу, називається синтезуючим.*

В загальному випадку система (2) може не бути повністю керованою. У цьому випадку наведене означення набуває такого вигляду [31].

Означення 2. *Задача синтезу керування для системи* (2) *полягає у визначені множини* $\mathcal{W}(\tau, T, M) \subset \mathbb{R}^n$ *та керування з оберненим зв'язком* $u = \tilde{u}(x,t)$, *такого, що є допустимим і всі розв'язки системи*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), \tilde{u}(x(t),t), t)$$

такі, що $x(\tau) \in \mathcal{W}(\tau, T, M)$, *в певний момент* $t = T$ *попадають на термінальну множину* M, *тобто* $x(T) \in M$.

Тут $\tau < T$. Час, за який здійснюється перевід на множину M називається *часом перехідного процесу.* Якщо при цьому необхідно оптимізувати деякий критерій якості $\mathcal{I}(u, x, T)$, то така постановка називається *задачею синтезу оптимального керування.*

[1]Наприклад, умови Каратеодорі і умови квазілінійності [23]

Найбільш розповсюдженим підходом до розв'язування задачі синтезу є метод динамічного програмування, запропонований Р. Белманом [28, 29]. Методики, що розвиваються на основі методу Белмана, можна умовно розбити на дві групи. До першої входять методи розв'язування диференціального рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана з метою знаходження функції Белмана [16, 22, 26, 30, 33]. Другу групу складають апроксимації оптимального керування, які базуються на принципі оптимальності [3, 7, 18, 19].

Один з розповсюджених підходів до розв'язування задачі синтезу керування полягає у зведенні цієї задачі до проблеми побудови стабілізуючого керування. Це означає, що в структуру системи керування вводиться додаткова ланка оберненого зв'язку. Вибір цієї ланки здійснюється, наприклад, з застосуванням другого методу Ляпунова. Якщо потрібно забезпечити стійкість програмного руху і на класі стабілізуючих регуляторів оптимізувати критерій якості, то така постановка є задачею оптимальної стабілізації [2,3,7,13–15,17]. Між функціями Ляпунова, Белмана і Кротова існує тісний зв'язок. Слід зауважити, що для ряду задач синтезу керування може бути застосований принцип максимуму Понтрягіна [5].

Мета навчального посібника полягає у висвітленні сучасних методів розв'язування задачі синтезу в теорії керування. В його основу покладено лекції, які читались авторами в різних спеціальних і нормативних курсах на факультеті кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка і в Інституті математики, економіки та механіки Одеського національного університету імені І.І. Мечникова для студентів, що навчаються за напрямком "Прикладна математика".

Лекція 1

Метод динамічного програмування: дискретний варіант

1.1 Принцип оптимальності і дискретне рівняння Белмана

Розглянемо наступну задачу оптимального керування: мінімізувати функціонал

$$\mathcal{I}(u,x)=\sum_{k=0}^{N-1} g_k\left(x\left(k\right),u\left(k\right)\right)+\Phi\left(x\left(N\right)\right) \tag{1.1}$$

при умовах

$$x\left(k+1\right)=f_k\left(x\left(k\right),u\left(k\right)\right),\ \ k=0,1,...,N-1, \tag{1.2}$$

$$x\left(k\right)\in X_k,\ \ k=0,1,...,N, \tag{1.3}$$

$$u\left(k\right)\in \mathcal{U}_k,\ \ k=0,1,...,N-1. \tag{1.4}$$

Тут $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ – замкнена множина фазових обмежень в момент $k=0,1,...,N$, $\mathcal{U}_k \subseteq \mathbb{R}^m$ – замкнена множина обмежень на керування в момент $k=0,1,...,N-1$, $g_k(x,u)$, $\Phi(x)$ – неперервні функції, $k=0,1,...,N-1$, $f_k(x,u)$ – неперервна вектор-функція розмірності n. Розв'язком задачі (1.1) - (1.4) називається пара послідовностей $(\{u_*(k)\},\{x_*(k)\})$, яка забезпечує мінімум функціоналу (1.1), при умовах (1.2) - (1.4).

Задача (1.1) - (1.4) має зміст, якщо множина X_N є досяжною з точок множини X_0.

Означення 1.1. *Множина X_N називаеться досяжною з точки $z \in X_k$, якщо існує таке допустиме керування $\{u(j)\}_{j=k}^{N-1}$ та відповідна йому траекторія системи* (1.2) $\{x(j)\}_{j=k}^{N-1}$ *з початковою умовою $x(k) = z$ такі, що $x(N) \in X_N$.*

Розглянемо *допоміжну задачу* до задачі (1.1) - (1.4). Зафіксуємо $s \in \{1, 2, ..., N-1\}$. Задача полягає в тому. щоб мінімізувати функціонал

$$\mathcal{I}_s(u, x) = \sum_{k=s}^{N-1} g_k(x(k), u(k)) + \Phi(x(N)) \tag{1.5}$$

при умовах

$$x(k+1) = f_k(x(k), u(k)), \ k = s, s+1, ..., N-1, \tag{1.6}$$

$$x(k) \in X_k, k = s, s+1, ..., N, \tag{1.7}$$

$$x(s) = x_*(s), \tag{1.8}$$

$$u(k) \in \mathcal{U}_k, \ k = s, s+1, ..., N-1. \tag{1.9}$$

Має місце теорема.

Теорема 1.1 (принцип оптимальності Белмана)**.** *Якщо* $(\{\tilde{u}(k)\}, \{\tilde{x}(k)\})$ *є розв'язок задачі* (1.5) - (1.9)*, то він співпадає з розв'язком задачі* (1.1) - (1.4) *для $k = s, s+1, ..., N$.*

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що твердження теореми не вірне і $\mathcal{I}_s(u_*, x_*) > \mathcal{I}_s(\tilde{u}, \tilde{x})$. Побудуємо керування

$$v(k) = \begin{cases} u_*(k), & k = 0, 1, ..., s-1; \\ \tilde{u}(k), & k = s, s+1, ..., N. \end{cases}$$

Тоді відповідна йому траекторія має вигляд

$$y(k) = \begin{cases} x_*(k), & k = 0, 1, ..., s-1; \\ \tilde{x}(k), & k = s, s+1, ..., N. \end{cases}$$

Таким способом,

$$\mathcal{I}(v,y)=\sum_{k=0}^{N-1} g_k\left(y\left(k\right),v\left(k\right)\right)+\Phi\left(y\left(N\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{s-1} g_k\left(x_*\left(k\right),u_*\left(k\right)\right)+\sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(\tilde{x}\left(k\right),\tilde{u}\left(k\right)\right)+\Phi\left(\tilde{x}\left(N\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{s-1} g_k\left(x_*\left(k\right),u_*\left(k\right)\right)+\mathcal{I}_s(\tilde{u},\tilde{x})<$$

$$<\sum_{k=0}^{s-1} g_k\left(x_*\left(k\right),u_*\left(k\right)\right)+\mathcal{I}_s(u_*,x_*)=\mathcal{I}(u_*,x_*).$$

Отже, керування u_* не є оптимальним. Протиріччя доводить теорему. $\square$

Позначимо

$$\mathcal{B}_s(z)=\min_{\{u(k)\}_{k=s}^{N-1}}\left\{\sum_{k=s}^{N-1} g_k(x(k),u(k))+\Phi(x(N))\right\}, \tag{1.10}$$

за умови, що

$$x\left(k+1\right)=f_k\left(x\left(k\right),u\left(k\right)\right),\ k=s,s+1,...,N-1,\ x(s)=z \tag{1.11}$$

і мають місце включення $x\left(k\right)\in X_k$, $k=s,s+1,...,N$, $u\left(k\right)\in\mathcal{U}_k$, $k=s,s+1,...,N-1$. Функція $\mathcal{B}_s(z)$ називається *функцією Белмана* задачі (1.1)-(1.4).

Використовуючи позначення (1.5), можна записати

$$\mathcal{B}_s(z)=\min_{\{u(k)\}_{k=s}^{N-1}}\mathcal{I}_s\left(u,x\right).$$

Нехай пара $(\{u_*(k)\},\{x_*(k)\})$ доставляє мінімум правій частині рівності (1.10). Тоді

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_s(z)&=\min_{\{u(k)\}_{k=s}^{N-1}}\left\{\sum_{k=s}^{N-1} g_k(x(k),u(k))+\Phi(x(N))\right\}=\\&=\sum_{k=s}^{N-1} g_k(x_*(k),u_*(k))+\Phi(x_*(N))=\\&=g_s(z,u_*(s))+\sum_{k=s+1}^{N-1} g_k(x_*(k),u_*(k))+\Phi(x_*(N)).\end{aligned} \tag{1.12}$$

За принципом оптимальності Белмана

$$\sum_{k=s+1}^{N-1} g_k(x_*(k), u_*(k)) + \Phi(x_*(N)) =$$

$$= \min_{\{u(k)\}_{k=s+1}^{N-1}} \left\{ \sum_{k=s+1}^{N-1} g_k(x(k), u(k)) + \Phi(x(N)) \right\},$$

а за означенням функції Белмана

$$\min_{\{u(k)\}_{k=s+1}^{N-1}} \left\{ \sum_{k=s+1}^{N-1} g_k(x(k), u(k)) + \Phi(x(N)) \right\} = \mathcal{B}_{s+1}(x(s+1, z)).$$

Тут $\{x(k, z)\}$ – розв'язок задачі Коші (1.11) за умови $\{u(k)\} = \{u_*(k)\}$. Отже,

$$\mathcal{B}_s(z) = g_s(z, u_*(s)) + B_{s+1}(x(s+1, z)).$$

Враховуючи, що

$$x\,(s+1, z) = f_s\,(z, u_*\,(s))\,,$$

отримаємо

$$\mathcal{B}_s(z) = g_s(z, u_*(s)) + \mathcal{B}_{s+1}\,(f_s\,(z, u_*\,(s)))\,. \tag{1.13}$$

Якщо замість $(\{u_*(k)\}, \{x_*(k)\})$ в (1.12) поставити іншу допустиму пару $(\{u(k)\}, \{x(k)\})$, то права частина рівності (1.12) може тільки збільшитись. Тобто,

$$\mathcal{B}_s(z) = \min_{\{u(k)\}_{k=s}^{N-1}} \left\{ \sum_{k=s}^{N-1} g_k(x(k), u(k)) + \Phi(x(N)) \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{k=s}^{N-1} g_k(x(k), u(k)) + \Phi(x(N)).$$

Тому в (1.13) ми маємо $\mathcal{B}_s(z) \leq g_s(z, u(s)) + \mathcal{B}_{s+1}\,(f_s\,(z, u\,(s)))$. Виходячи з (1.13), для пари $(\{u_*(k)\}, \{x_*(k)\})$ в останній нерівності ми отримуємо рівність, тому

$$\mathcal{B}_s(z) = \min_{u \in \mathcal{U}_s} \{g_s(z, u) + \mathcal{B}_{s+1}\,(f_s\,(z, u))\}\,. \tag{1.14}$$

Співвідношення (1.14) називається *дискретним рівнянням Белмана.*

Приклад 1.1. Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає у мінімізації функціоналу

$$\mathfrak{I}\left(u,x\right)=\sum_{k=0}^{N-1}u^{2}\left(k\right)+x^{2}\left(N\right)$$

при умовах

$$x\left(k+1\right)=a(k)x(k)+u(k),\ k=0,1,...,N-1.$$

Тут $u(k)$ – скалярне керування, $k=0,1,...,N-1$, $x(k)$ – скалярна траєкторія заданої системи керування, $a(k)\in\mathbb{R}^1$, $k=0,1,...,N-1$, $x(0)=x_0$ – відоме початкове положення.

Дискретне рівняння Белмана 1.14 для цієї задачі має вигляд

$$\mathcal{B}_s(z)=\min_u\left\{u^2+\mathcal{B}_{s+1}\left(a(s)z+u\right)\right\}.$$

При цьому $\mathcal{B}_N(z)=z^2$. Функцію Белмана шукаємо у вигляді

$$\mathcal{B}_s(z)=b(s)z^2,$$

де значення $b(s)\in\mathbb{R}^1$, $s=0,1,...,N$ потрібно знайти. Підставляємо функцію Белмана в дискретне рівняння Белмана і одержуємо

$$b(s)z^2=\min_u\left\{u^2+b(s+1)\left(a(s)z+u\right)^2\right\}.$$

Розв'яжемо естремальну задачу

$$\min_u\left\{u^2+b(s+1)\left(a(s)z+u\right)^2\right\}.$$

Прирівнюючи похідну від $u^2+b(s+1)\left(a(s)z+u\right)^2$ за змінною u до нуля, отримуємо

$$u(s)=-\frac{b(s+1)a(s)z}{1+b(s+1)}.$$

Підставляючи останнє співвідношення в дискретне рівняння Белмана і скорочуючи на z^2, одержуємо дискретне рівняння для знаходження $b(s)\in\mathbb{R}^1$, $s=0,1,...,N$, а саме

$$b(s)=\frac{b(s+1)a^2(s)}{1+b(s+1)},\ s=0,1,\ldots,N-1.$$

З умови $\mathcal{B}_N(z)=z^2$ випливає $b(N)=1$. Оптимальне керування має вигляд

$$u_*(k,x(k))=-\frac{b(k+1)a(k)x(k)}{1+b(k+1)},\ k=0,1,\ldots,N-1.$$

З означення функції Белмана випливає, що оптимальне значення критерію якості рівне
$$\mathcal{I}_* = \mathcal{B}_0(x_0) = b(0)x_0^2.$$

Отже, задачу (1.2) - (1.4) можна розбити на дві.

1). Для кожної точки $x_0 \in X_0$ мінімізувати функціонал (1.2) при обмеженнях (1.2) - (1.4). Таким способом оптимальне значення функціоналу буде залежати від точки x_0:

$$p(x_0) = \min_{\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}} \mathcal{I}(u, x).$$

2). Знайти оптимальне значення функціоналу $\mathcal{I}_* = \min\limits_{x_0 \in X_0} p(x_0)$.

На основі рівняння Белмана будується алгоритм розв'язування задачі (1.1) - (1.4).

Алгоритм 1.1 (алгоритм методу динамічного програмування для дискретних систем)**.** *Зворотній хід методу.*

Крок 1. Покладемо в рівняння (1.14) $s = N - 1$ *і розв'яжемо екстремальну задачу*

$$\min_{u(N-1)\in\mathcal{U}_{N-1}} \left\{g_{N-1}(z, u(N-1)) + \Phi\left(f_{N-1}\left(z, u\left(N-1\right)\right)\right)\right\}.$$

для всіх $z \in X_{N-1}$, *з яких досяжна множина* X_N, *тобто, для яких* $x(N) = g_{N-1}(z, u(N-1)) \in X_N$ *для деякого допустимого керування* $u(N-1) \in \mathcal{U}_{N-1}$. *Запам'ятовуємо для кожної точки* $z \in X_{N-1}$ *розв'язок цієї задачі* $u^*(N-1, z)$ *та*

$$\mathcal{B}_{N-1}(z) = g_{N-1}(z, u_*(N-1)) + \Phi\left(f_{N-1}\left(z, u_*\left(N-1\right)\right)\right).$$

Крок 2. В рівняння Белмана (1.14) *покладемо* $s = N - 2$ *і для всіх* $z \in X_{N-2}$, *для яких досяжна множина* X_N, *розв'яжемо задачу*

$$\min_{u(N-2)\in\mathcal{U}_{N-2}} \left\{g_{N-2}(z, u(N-2)) + \mathcal{B}_{N-1}\left(f_{N-2}\left(z, u\left(N-2\right)\right)\right)\right\}.$$

Отримуємо оптимальне керування $u_*(N-2, z)$ *і*

$$\mathcal{B}_{N-2}(z) = g_{N-2}(z, u_*(N-2)) + \mathcal{B}_{N-1}\left(f_{N-2}\left(z, u_*\left(N-2\right)\right)\right)$$

як функцію від $z \in X_{N-2}$.

Крок 3. Продовжуючи аналогічно процес обчислень, при $s = 0$ *приходимо до задачі*

$$\mathcal{B}_0(z) = \min_{u(0)\in\mathcal{U}_s} \left\{g_0(z, u(0)) + \mathcal{B}_1\left(f_0\left(z, u\left(0\right)\right)\right)\right\}.$$

Для всіх $z \in X_0$ розв'язуемо цю задачу і отримуємо оптимальне керування $u_*(0,z)$, а також значення функції Белмана $\mathcal{B}_0(z)$.

Прямий хід алгоритму.

Крок 4. Якщо $x(0)$ не є фіксованим, то знаходимо

$$x_*(0) = \arg\min_{z \in X_0} \mathcal{B}_0(z).$$

Якщо $x(0) = x_0$ є заданим в задачі (1.1) - (1.4), *то $x_*(0) = x_0$.*

Крок 5. Знаходимо $u_*(0) = u_*(0, x_*(0))$. Далі

$$x_*\left(1\right) = f_0\left(x_*\left(0\right), u_*\left(0\right)\right)$$

згідно рівняння (1.7). *Знаходимо $u_*(1) = u_*(1, x_*(1))$, підставляючи точку $x_*\left(1\right) = f_0\left(x_*\left(0\right), u_*\left(0\right)\right)$ у знайдену на прямому ході методу функцію керування $u_* = u_*(1, z)$ і так далі, знаходячи*

$$x_*\left(k+1\right) = f_0\left(x_*\left(k\right), u_*\left(k\right)\right)$$

і підставляючи це значення оптимальної траєкторії в $u_*(k+1,z)$, так що $u_*(k+1) = u_*(k+1, x_*\left(k+1\right))$, $k = 0, 1, ..., N-1$.

Розглянемо особливості алгоритму методу динамічного програмування.

- Алгоритм може бути застосований для задачі з нефіксованим інтервалом, у тому числі і до задачі швидкодії. Для цього потрібно вказати максимально можливий час, і застосовувати метод, збільшуючи поступово часову змінну.

- За умови повної дискретизації, метод дає абсолютний мінімум з врахуванням обмежень.

- Метод розв'язує задачу *синтезу оптимального керування.*

- На кожному кроці прямого ходу методу запам'ятовується лише оптимальне керування. Це значно економить час обчислень порівняно з перебором. Але разом з тим при зростанні розмірності векторів x та u суттєво збільшуються об'єми пам'яті, необхідної для запам'ятовування векторів $u_*(k,z)$, $x_*\left(k\right)$ на оберненому ході методу.

1.2 Оптимальне керування лінійною дискретною системою

Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає у мінімізації функціоналу

$$\mathcal{J}(u) = \sum_{k=0}^{N-1} \{\langle Q(k)x(k), x(k)\rangle + \langle P(k)u(k), u(k)\rangle\} + \langle Q(N)x(N), x(N)\rangle$$

на розв'язках дискретної системи

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k),\ x(0) = x_0,\ k = 0, 1..., N-1,$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^*$ – вектор керування, $A(k)$ – матриця розмірності $n \times n$, $B(k)$ – матриця розмірності $n \times m$, $Q(k)$ – невід'ємновизначена симетрична $n \times n$-матриця, $P(k)$ – додатновизначена симетрична $m \times m$-матриця, $k = 0, 1...N-1$, $Q(N)$ – невід'ємновизначена симетрична $n \times n$-матриця.

Запишемо дискретне рівняння Белмана

$$\mathcal{B}_s(z) = \min_{u(s)} \{\ \langle Q(s)z, z\rangle + \langle P(s)u(s), u(s)\rangle + B_{s+1}(A(s)z + B(s)u(s))\ \},$$

де $s = 0, 1..., N-1$. При цьому $\mathcal{B}_N(z) = \langle Q(N)z, z\rangle$. Функцію Белмана будемо шукати у вигляді

$$\mathcal{B}_s(z) = \langle R(s)z, z\rangle, \tag{1.15}$$

де $R(s)$ – матриця розмірності $n \times n$, $s = 0, 1..., N$. Підставимо цю функцію в рівняння Белмана. Розглянемо функцію

$$\begin{gathered}\mathcal{H}_s(z, u) = \langle Q(s)z, z\rangle + \langle P(s)u, u\rangle + \mathcal{B}_{s+1}(A(s)z + B(s)u) = \\ = \langle Q(s)z, z\rangle + \langle P(s)u, u\rangle + \langle R(s+1)(A(s)z + B(s)u), A(s)z + B(s)u\rangle = \\ = \langle Q(s)z, z\rangle + \langle P(s)u, u\rangle + \langle R(s+1)A(s)z, A(s)z\rangle + \\ + \langle B^*(s)R(s+1)A(s)z, u\rangle + \langle B^*(s)R(s+1)B(s)u, u\rangle + \\ + \langle u, B^*(s)R^*(s+1)A(s)z\rangle.\end{gathered}$$

Отже, рівняння Белмана має вигляд

$$B_s(z) = \min_{u(s)} \mathcal{H}_s(z, u(s)).$$

Розв'яжемо задачу

$$\mathcal{H}_s(z, u(s)) \to \min_{u(s)}.$$

Для цього випишемо умову екстремуму
$$\frac{\partial \mathcal{H}_s(x,u)}{\partial u} = 0.$$
Маємо
$$\frac{\partial \mathcal{H}_s(x,u)}{\partial u} = 2P(s)u + B^*(s)R(s+1)A(s)z + B^*(s)R^*(s+1)A(s)z +$$
$$+ B^*(s)R(s+1)B(s)u + B^*(s)R*(s+1)B(s)u = 0.$$
Звідси
$$(2P(s) + B^*(s)R(s+1)B(s) + B^*(s)R^*(s+1)B(s))u =$$
$$= -(B^*(s)R(s+1)A(s) + B^*(s)R^*(s+1)A(s))z.$$
Позначимо
$$L(s+1) = 2P(s) + B^*(s)R(s+1)B(s) + B^*(s)R^*(s+1)B(s).$$
Ця матриця є симетричною і додатновизначеною. Розглянемо також матрицю
$$M(s+1) = -(B^*(s)R(s+1)A(s) + B^*(s)R^*(s+1)A(s)).$$
Тоді
$$u_* = L^{-1}(s+1)M(s+1)z = W(s+1)z,$$
де $W(s+1) = L^{-1}(s+1)M(s+1)$. Підставляємо u_* в рівняння Белмана
$$\langle R(s)z, z\rangle = \langle Q(s)z, z\rangle + \langle P(s)W(s+1)z, W(s+1)z\rangle +$$
$$+ \langle P(s)A(s)z, A(s)z\rangle + \langle B^*(s)R(s+1)A(s)z, W(s+1)z\rangle +$$
$$+ \langle B^*(s)R(s+1)B(s)W(s+1)z, W(s+1)z\rangle +$$
$$+ \langle W(s+1)z, B^*(s)R^*(s+1)A(s)z\rangle.$$
Далі отримуємо
$$\langle R(s)z, z\rangle = \langle Q(s)z, z\rangle + \langle W^*(s+1)P(s)W(s+1)z, z\rangle +$$
$$+ \langle A^*(s)P(s)A(s)z, z\rangle + \langle W^*(s+1)B^*(s)R(s+1)A(s)z, z\rangle +$$
$$+ \langle W^*(s+1)B^*(s)R(s+1)B(s)W(s+1)z, z\rangle +$$
$$+ \langle W^*(s+1)B^*(s)R^*(s+1)A(s)z, z\rangle.$$

Останній вираз можна подати у вигляді $\langle C(s)z, z\rangle = 0$, де $C(s)$ – матриця розмірності $n \times n$. Оскільки $z \in \mathbb{R}^n$ – довільне, то покладемо $C(s) = 0$, тобто

$$\begin{aligned} R(s) = Q(s) + W^*(s+1)P(s)W(s+1) + A^*(s)P(s)A(s) + \\ + W^*(s+1)B^*(s)R(s+1)A(s) + A^*(s)R^*(s+1)B(s)W(s+1) + \\ + W^*(s+1)B^*(s)R(s+1)B(s)W(s+1), \end{aligned} \tag{1.16}$$

де $s = N-1, N-2..., 0$. При цьому з умови $\mathcal{B}_N(z) = \langle Q(N)z, z\rangle$ маємо

$$R(N) = Q(N).$$

З рівняння (1.16) і $R(N) = Q(N)$ випливає, що $R(s) = R^*(s)$. У цьому можна переконатись транспонуванням рівності (1.16). В результаті транспонування (1.16) ми одержимо для знаходження матриці $R^*(s)$ рівність, аналогічну до (1.16). Тоді випишемо матриці

$$\begin{aligned} W(s+1) = L^{-1}(s+1)M(s+1) = \\ = -(P(s) + B^*(s)R(s+1)B(s))^{-1}B^*(s)R^*(s+1)A(s). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Враховуючи, що $z = x(s)$, оптимальне керування має вигляд

$$u_*(x(s), s) = W(s+1)x(s). \tag{1.18}$$

При цьому, виходячи з означення функції Белмана, одержуємо, що оптимальне значення критерію якості

$$\mathcal{I}_* = \langle P(0)x_0, x_0\rangle .$$

Отже, знаходження оптимального керування відбувається за таким алгоритмом.

Алгоритм 1.2. *Задаємо N, матриці $A(k)$, $B(k)$, $Q(k)$, $P(k)$, $Q(N)$, де $k = 0, 1...N-1$.*

Крок 1. Розв'язуємо матричне дискретне рівняння (1.16) *з умовою $R(N) = Q(N)$, де матриця $W(s+1)$ шукається за формулою* (1.17).

Крок 2. Знаходимо оптимальну траєкторію $\{x_*(k)\}$ з рівняння

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)W(k)x(k),\ x(0) = x_0,\ k = 0, 1, ..., N-1.$$

Крок 3. Знаходимо оптимальне керування

$$u_*(s) = W(s+1)x_*(s),\ s = 0, 1..., N-1.$$

Крок 4. Обчислюємо оптимальне значення критерію якості

$$\mathcal{I}_* = \langle P(0)x_0, x_0\rangle .$$

Література: [7, 27–29]

Лекція 2

Метод динамічного програмування для неперервних систем

2.1 Принцип оптимальності Белмана

Нехай $X(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ – фазові обмеження, $\mathcal{U}(t) \subseteq \mathbb{R}^m$ – геометричні обмеження на керування, при цьому множини $X(t)$, $\mathcal{U}(t)$ є замкненими, $t \in [t_0, T]$. Задача оптимального керування полягає в знаходженні нижньої точної грані функціоналу

$$\mathcal{I}(u, x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(T)) \tag{2.1}$$

за умов

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \tag{2.2}$$

$$x(t) \in X(t),\ u(t) \in \mathcal{U}(t),\ t \in [t_0, T]. \tag{2.3}$$

Тут $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – функція керування, $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $f(x, u, t)$ – n-вимірна вектор-функція, що задовольняє умови існування, єдиності і продовжуваності розв'язку задачі Коші, $f_0(x, u, t)$, $\Phi(x)$– неперервні функції. Розв'язком задачі (2.1) - (2.3) називають пару (u_*, x_*), яка доставляє значення точної нижньої грані функціоналу (2.1). Керування u вибирають, як правило, з класу кусково-неперервних функцій, або з класу вимірних за часовою змінною функцій.

Метод динамічного програмування базується на принципі оптимальності Белмана. Геометричний зміст принципу Белмана є таким: якщо траєкторія системи (2.2) з'єднує точки AC і є оптимальною траєкторією

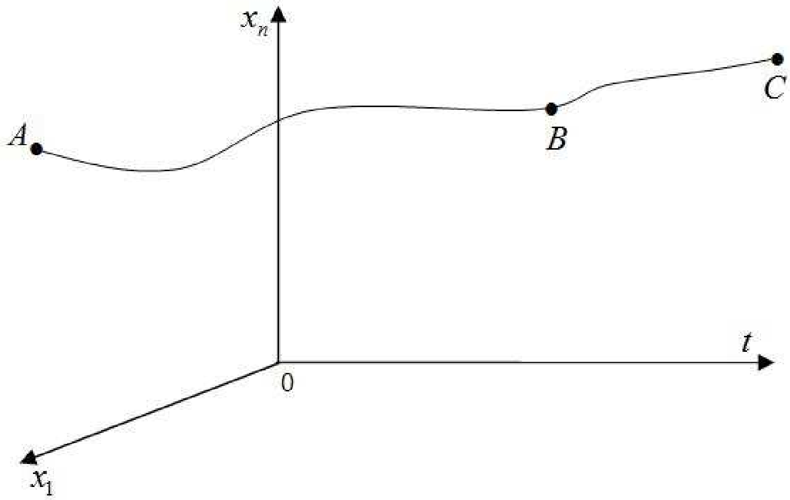

Рис. 2.1: Геометричний зміст принципу Белмана

задачі (2.1) - (2.3), то траєкторія BC також буде оптимальною для деякої задачі оптимального керування при довільному виборі точки B на траєкторії AC (рис. 2.1).

Розглянемо *допоміжну задачу* до задачі (2.1) - (2.3). Зафіксуємо $s \in (t_0, T)$. Задача полягає в тому, щоб мінімізувати функціонал

$$\mathcal{I}_s(u,x) = \int_s^T f_0(x,u,t)dt + \Phi(x(T)) \tag{2.4}$$

при умовах

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t),\ x(s) = x_*(s), \tag{2.5}$$

$$x(t) \in X(t),\ u(t) \in \mathcal{U}(t),\ t \in [s,T]. \tag{2.6}$$

Має місце така теорема.

Теорема 2.1 (принцип оптимальності Белмана)**.** *Якщо пара* $(\tilde{u}(t), \tilde{x}(t))$ *є розв'язком допоміжної задачі* (2.4) - (2.6)*, то вона співпадає з розв'язком задачі* (2.1) - (2.3) *на відрізку* $t \in [s,T]$.

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що $\mathcal{I}_s(u_*, x_*) > \mathcal{I}_s(\tilde{u}, \tilde{x})$. Побудуємо керування

$$u(t) = \begin{cases} u_*(t), & t \in [t_0, s]; \\ \tilde{u}(t), & t \in [s,T]. \end{cases}$$

Тоді відповідна йому траєкторія має вигляд

$$x(t) = \begin{cases} x_*(t), & t \in [t_0, s]; \\ \tilde{x}(t), & t \in [s, T]. \end{cases}$$

Таким способом,

$$\mathcal{I}(u, x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(T)) =$$
$$= \int_{t_0}^{s} f_0(x_*(t), u_*(t), t)dt + \int_{s}^{T} f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)dt + \Phi(\tilde{x}(T)) <$$
$$< \int_{t_0}^{s} f_0(x_*(t), u_*(t), t)dt + \mathcal{I}_s(u_*, x_*) = \mathcal{I}(u_*, x_*).$$

Отже, керування u_* не є оптимальним. Протиріччя доводить теорему. □

Зауваження. Принцип оптимальності Белмана справджується також для задачі з нефіксованим часом.

Приклад 2.1. Принцип Белмана виконується не для всіх задач оптимального керування. Так, розглянемо задачу мінімізації функціоналу

$$\mathcal{I}(u, x) = \alpha^2 \int_0^{2\pi} (x(t) - \sin t)^2 dt + \left(\int_0^{2\pi} x(t)dt \right)^2, \tag{2.7}$$

де

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \ t \in [0, 2\pi]. \tag{2.8}$$

Очевидно, що $\mathcal{I}(u, x) \geq 0$. Тому пара

$$u_*(t) = \cos t, \ x_*(t) = \sin t, \ t \in [0, 2\pi]$$

є розв'язком цієї задачі, причому оптимальне значення функціоналу

$$\mathcal{I}_* = \mathcal{I}(u_*, x_*) = 0.$$

Побудуємо для задачі (2.7), (2.8) допоміжну задачу. Зафіксуємо $s \in [0, 2\pi]$. Потрібно мінімізувати функціонал

$$\mathcal{I}_s(u, x) = \alpha^2 \int_s^{2\pi} (x(t) - \sin t)^2 dt + \left(\int_s^{2\pi} x(t)dt \right)^2$$

за умови
$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(s) = x_*(s) = \sin s,\ t \in [s, T].$$
Візьмемо $s = \pi$. Тоді $x_*(\pi) = 0$ і
$$\mathcal{I}_s(u_*, x_*) = \left(\int_{\pi}^{2\pi} \sin t dt\right)^2 = 4.$$

Розглянемо керування $\tilde{u}(t) = 0$. Йому відповідає траєкторія $\tilde{x}(t) = 0$ в силу допоміжної задачі. Так,
$$\mathcal{I}_s(\tilde{u}, \tilde{x}) = \alpha^2 \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t dt = \alpha^2 \frac{\pi}{2}.$$

Знайдемо α, при яких $\mathcal{I}_s(u_*, x_*) > \mathcal{I}_s(\tilde{u}, \tilde{x})$. Для цих α виконується $\alpha^2 \frac{\pi}{2} < 4$. Отже, керування u_* не є оптимальним для допоміжної задачі при $\alpha^2 < \frac{8}{\pi}$.

2.2 Функція Белмана

Розглянемо задачу оптимального керування (2.1)-(2.3). Функція
$$\mathcal{B}(z, s) = \inf_u \left\{ \int_s^T f_0(x(t), u(t), t) dt + \Phi(x(T)) \right\}, \tag{2.9}$$
що визначена на розв'язках системи (2.2) при початковій умові $x(s) = z$, називається *функцією Белмана* задачі (2.1)-(2.3). Тут $z \in X(s)$, $x(\cdot)$ – розв'язок системи (2.2) при допустимому керуванні $u(t) \in \mathcal{U}(t)$, $x(t) \in X(t)$, $t \in [s, T]$, інфінум в правій частині співвідношення (2.9) береться за допустимими керуваннями при $t \in [s, T]$.

За означенням функції Белмана $\mathcal{B}(x_0, t_0)$ дорівнює оптимальному значенню функціоналу (2.1) для задачі (2.1)-(2.3) з фіксованим лівим кінцем $x(t_0) = x_0$.

Виходячи з означення функції Белмана (2.9) та властивостей інтеграла, отримуємо
$$\mathcal{B}(z, t) = \inf_u \left\{ \int_t^T f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x(T)) \right\} =$$
$$= \int_t^T f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x_*(T)) =$$
$$= \int_t^{t+\Delta t} f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^T f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x_*(T)).$$

Тут Δt – довільне число, таке, що $t+\Delta t < T$, $(x_*(t), u_*(t))$ – розв'язок задачі (2.1)-(2.3). Згідно принципу оптимальності Белмана маємо рівність

$$\int_{t+\Delta t}^{T} f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau)d\tau + \Phi(x_*(T)) = \mathcal{B}(x_*(t+\Delta t), t+\Delta t).$$

На довільній допустимій парі $(x(t), u(t))$ має місце нерівність

$$\mathcal{B}(z,t) \leq \int_{t}^{T} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau + \Phi(x(T)).$$

У такий спосіб

$$\mathcal{B}(z,t) = \inf_{u} \left\{ \int_{t}^{t+\Delta t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau + \mathcal{B}(x(t+\Delta t), t+\Delta t) \right\}. \quad (2.10)$$

Точна нижня межа в правій частині (2.10) береться за допустимими на відрізку $t \in [t, t+\Delta t]$ керуваннями. Рівняння (2.10) називається *рівнянням Белмана в інтегральній формі.* За його допомогою будуються методи, аналогічні алгоритму динамічного програмування для дискретних систем.

2.3 Алгоритм методу динамічного програмування для неперервних систем

Алгоритм складається з двох частин: прямого ходу і зворотного ходу методу. Спочатку виконується зворотній хід методу. Він полягає у тому, що на часовій сітці у напрямку від T до t_0 для кожної допустимої точки z розв'язується рівняння (2.10). Цим самим знаходится синтезуюча функція керування. На прямому ході оптимальне керування „збирається" у напрямку від t_0 до T за допомогою системи (2.2), умови Коші $x(t_0) = x_0$ з використанням побудованої на першому етапі алгоритму синтезуючої функції керування.

Алгоритм 2.1. *Розіб'ємо відрізок* $[t_0, T]$ *сіткою* $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$ *з деяким кроком* h. *Позначимо* $X_i = X(t_i)$, $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}(t_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., N$.

Зворотній хід методу.

Крок 1. Для будь-якого $z \in X_{N-1}$ *розв'язуємо задачу*

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{N-1}} \left\{ \int_{t_{N-1}}^{T} f_0(x(\tau), v, \tau)d\tau + \Phi(x(T)) \right\}, \; x(t_N) \in X_N.$$

Тут $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), v, t)$, $x(t_{N-1}) = z$, $t \in [t_{N-1}, T]$. *Знаходимо оптимальну функцію керування*

$$u_* = u_*(z, t_{N-1}),$$

відповідний розв'язок $x_*(t)$ *системи* (2.2), $t \in [t_{N-1}, T]$ *та*

$$\mathcal{B}(z, t_{N-1}) = \int_{t_{N-1}}^{T} f_0(x_*(\tau), u_*, \tau)d\tau + \Phi(x_*(T)).$$

Крок 2. Розв'язуємо для $z \in X_{N-2}$ *задачу*

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{N-2}} \left\{ \int_{t_{N-2}}^{t_{N-1}} f_0(x(\tau), v, \tau)d\tau + \mathcal{B}(x(t_{N-1}), t_{N-1}) \right\},$$

$x(t_{N-1}) \in X_{N-1}$. *Тут* $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), v, t)$, $x(t_{N-2}) = z$, $t \in [t_{N-2}, t_{N-1}]$. *Знаходимо*

$$u_* = u_*(z, t_{N-2}),$$

відповідний розв'язок $x_*(t)$ *системи* (2.2), $t \in [t_{N-2}, t_{N-1}]$ *та*

$$\mathcal{B}(z, t_{N-2}) = \int_{t_{N-2}}^{t_{N-1}} f_0(x_*(\tau), u_*, \tau)d\tau + \mathcal{B}(x_*(t_{N-1}), t_{N-1}).$$

Продовжуємо аналогічно процедуру обчислень, доки не прийдемо до наступної задачі.

Крок 3. Для $z \in X_0$ *розв'язуємо аналогічно до попередніх кроків задачу*

$$\mathcal{B}(z, t_0) = \inf_{v \in \mathcal{U}_0} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\tau), v, \tau)d\tau + \mathcal{B}(x(t_1), t_1) \right\}$$

$$x(t_1) \in X_1,$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), v, t),\ x(t_0) = z,\ t \in [t_0, t_1]. \tag{2.11}$$

Якщо початкова умова задачі (2.1)-(2.3) *є фіксованою, а саме* $x(t_0) = x_0$, *то в* (2.6) $z = x_0$. *Знаходимо*

$$u_* = u_*(z, t_0)$$

та запам'ятовуємо $\mathcal{B}(z, t_0)$ *для кожного* $z \in X_0$.

Прямий хід методу.

Крок 4. Якщо точка $x(t_0)$ *не є фіксованою, то знаходимо*

$$x_0 = \arg\min_{x \in X_0} \mathcal{B}(z, t_0).$$

Обчислюємо $u_* = u_*(x_0, t_0)$, *підставивши* x_0 *в знайдену на зворотному ході функцію* $u_*(x, t_0)$. *Далі, розв'язуючи задачу Коші*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u_*, t), x(t_0) = x_0,\ t \in [t_0, t_1],$$

визначаємо $x_*(t_1)$. *Підставляємо* $x_*(t_1)$ *у функцію керування* $u_*(x, t_1)$ *і знаходимо* $u_* = u_*(x_*(t_1), t_0)$. *Далі знову розв'язуємо задачу Коші*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u_*, t), x(t_1) = x_*(t_1),\ t \in [t_1, t_2]$$

і отримуємо $x_*(t_2)$ *і т.д. поки не визначимо* $x_*(t_N)$. *Так, знаходимо дві послідовності* $x_*(t_k)$, $u_* = u_*(x_*(t_k), t_k)$, $k = 0, 1, 2, ..., N$, *що апроксимують оптимальний розв'язок задачі* (2.1)-(2.3) *на часовій сітці* $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$. *Опис алгоритму методу динамічного програмування закінчено.*

2.4 Рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана

Припустимо, що функція Белмана (2.9) є неперервно диференційованою, $f_0(x, u, t)$, $\Phi(x)$, $f(x, u, t)$ є неперервними за своїми змінними функціями. Розглянемо інтегральне рівняння Белмана (2.10). При зроблених припущеннях, враховуючи, що $x(t) = z$ і має місце неперервна залежність розв'язку системи (2.2) від часової змінної, отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x(t+\Delta t), t+\Delta t) = \mathcal{B}(z,t) + \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t}\Delta t + \\ + \langle grad_z \mathcal{B}(z,t), x(t+\Delta t) - z\rangle + o(\Delta t). \end{aligned} \tag{2.12}$$

З (2.10) і (2.12) випливає

$$\begin{gathered} \mathcal{B}(z,t) = \inf_u \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \right. \\ \left. + \mathcal{B}(z,t) + \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t}\Delta t + \langle grad_z \mathcal{B}(z,t), x(t+\Delta t) - z\rangle + o(\Delta t) \right\}. \end{gathered}$$

Звідси, скоротивши $\mathcal{B}(z,t)$ і поділивши останній вираз на $\Delta t > 0$, отримуємо

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t} + \inf_u \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \right. \\ \left. + \left\langle grad_z \mathcal{B}(z,t), \frac{x(t+\Delta t) - z}{\Delta t} \right\rangle + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right\} = 0. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Враховуємо, що $\frac{x(t+\Delta t)-z}{\Delta t} \to \frac{dx(t)}{dt}$, $x(t) = z$, $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Позначимо

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau.$$

Так як

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau =$$
$$= \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{t_0}^{t+\Delta t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau - \int_{t_0}^{t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right] =$$
$$= \frac{1}{\Delta t} \left[G(t + \Delta t) - G(t) \right] \to \frac{d}{dt} G(t)$$

при $\Delta t \to 0$ і $\frac{dG(t)}{dt} = f_0(z, u(t), t)$, то

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \to f_0(z, u(t), t), \Delta t \to 0.$$

Таким способом, з (2.13) отримаємо

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t} + \inf_{u \in \mathcal{U}(t)} \left\{ \left\langle grad_z \mathcal{B}(z,t), \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle + f_0(z,u,t) \right\} = 0.$$

Так як

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u, t),\ \ x(t) = z,$$

то

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t} + \inf_{u \in \mathcal{U}(t)} \left\{ \langle grad_z \mathcal{B}(z,t), f(z,u,t) \rangle + f_0(z,u,t) \right\} = 0. \tag{2.14}$$

З означення функції Белмана випливає, що при $t = T$ виконується

$$\mathcal{B}(z, T) = \Phi(z). \tag{2.15}$$

Рівняння (2.14) називається *диференціальним рівнянням Гамільтона-Якобі-Белмана* задачі оптимального керування (2.1)-(2.3).

Приклад 2.2. Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає в мінімізації функціоналу

$$\mathcal{I}(u, x) = \int_{0}^{T} u^2(t) dt + x^2(T),$$

де

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t) + u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$ – функція керування, $a : [0,T] \to \mathbb{R}^1$ – неперервна функція, $t \in [0,T]$, точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ є заданою. Рівняння (2.14) має вигляд

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t} + \inf_u \left\{ \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial z} (a(t)z + u) + u^2 \right\} = 0. \tag{2.16}$$

Позначимо

$$\mathcal{H}(z,u,t) = \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial z} (a(t)z + u) + u^2.$$

Запишемо необхідну умову екстремуму

$$\frac{\partial \mathcal{H}(z,u,t)}{\partial u} = 0,$$

з якої випливає

$$u = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial z}. \tag{2.17}$$

Підставляючи (2.17) в (2.16), отримуюємо нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних для знаходження функції Белмана

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t} + a(t)z\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial z} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial z}\right)^2 = 0. \tag{2.18}$$

При цьому умова (2.15) дає $\mathcal{B}(z,T) = z^2$. Розв'язок (2.18) шукаємо у вигляді

$$\mathcal{B}(z,t) = b(t)z^2,$$

де $b(\cdot)$ – абсолютно неперервна скалярна функція. Оскільки

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t} = b'(t)z^2,\ \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial z} = 2b(t)z,$$

то для знаходження $b(\cdot)$ з (2.18) одержуємо диференціальне рівняння Бернуллі

$$b'(t) + 2a(t)b(t) - b^2(t) = 0,\ b(T) = 1.$$

З (2.17) випливає, що оптимальне керування має вигляд

$$u_*(x(t),t) = -b(t)x(t),$$

при цьому оптимальне значення критерію якості

$$\mathcal{I}_* = b(0)x_0^2.$$

Втім, диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана не завжди вдається розв'язати подібним способом.

Приклад 2.3. Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає в мінімізації критерію якості

$$\mathcal{I}(u, x_1, x_2) = \int_0^T \left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right) dt,$$

де

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)u_1(t) + x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = u_2(t). \end{cases}$$

Тут $(x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат, $(u_1, u_2)^*$ – вектор керування, $|u_1(t)| \leq 1$, $|u_2(t)| \leq 1$, $t \in [0, T]$, $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$, де точка $(x_1^0, x_2^0)^*$ задана. Рівняння (2.14) має вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial t} + \\ &+ \inf_{|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1} \left\{ \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_1} (z_1 u_1 + z_2) + \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_2} u_2 \right\} = 0, \\ &\mathcal{B}(z_1, z_2, T) = 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Позначимо

$$\mathcal{H}(z_1, z_2, u_1, u_2, t) = \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_1} (z_1 u_1 + z_2) + \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_2} u_2.$$

Мінімум функції $\mathcal{H}(z_1, z_2, u_1, u_2, t)$ за умов $|u_1| \leq 1$, $|u_2| \leq 1$ досягається в точках

$$\begin{aligned} u_1 &= -sign\left(z_1 \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_1}\right), \\ u_2 &= -sign\left(\frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_2}\right). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Підставляючи (2.20) в (2.19), отримуємо нелінійне диференціальне рівняння вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial t} + z_2 \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_1} - \left| z_1 \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_1} \right| - \left(\frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_2} \right)^2 = 0, \\ &\mathcal{B}(z_1, z_2, T) = 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Рівняння (2.21) потребує додаткових досліджень з використанням апарату в'язкісних або мінімаксних розв'язків [22, 26].

Приклад 2.4. Умова неперервної диференційованості функції Белмана не виконується в загальному. Розглянемо задачу оптимального керування

$$\mathcal{I}(u, x) = \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf,$$

за умов, що

$$\frac{dx}{dt} = u,$$

де $|u(t)| \leq 1$, $t \in [0, T]$, $x(0) = x_0$. За означенням функції Белмана

$$\mathcal{B}(z, s) = \frac{1}{2}\inf_u x^2(T),$$

де

$$\frac{dx}{dt} = u, \ t \in [s, T], \ x(s) = z.$$

Знайдемо функцію Белмана за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = \psi u.$$

З принципу максимуму випливає, що $u_*(t) = sign \psi(t)$, $t \in [s, T]$. Спряжена система має вигляд

$$\frac{d\psi}{dt} = 0, \ \psi(T) = -x(T).$$

Звідси $\psi(t) = -x(T)$ і $u_*(t) = -sign\,(x(T))$, $t \in [s, T]$. Отже, оптимальне керування є постійною величиною і $u_* = u_*(t) = 1$ або $u_* = u_*(t) = -1$. З

$$\frac{dx}{dt} = u, \ x(s) = z$$

випливає, що $x(T, u_*) = z + u_*(T - s)$. При $u_* = 1$ маємо $x(T, 1) = z + (T - s)$, а при $u_* = -1$ одержуємо $x(T, -1) = z - (T - s)$. Тоді

$$x^2(T, 1) - x^2(T, -1) = 4z(T - s).$$

Це означає, що якщо $z > 0$, то

$$\frac{1}{2}x^2(T, 1) - \frac{1}{2}x^2(T, -1) > 0$$

і тому $u_* = -1$. У випадку $z < 0$ одержуємо

$$\frac{1}{2}x^2(T, 1) - \frac{1}{2}x^2(T, -1) < 0,$$

а тому $u_* = 1$.

У такий спосіб, при $z > 0$ функція Белмана має вигляд

$$\mathcal{B}(z,s) = \frac{1}{2}\left(z - (T-s)\right)^2 = \frac{z^2}{2} + \frac{(T-s)^2}{2} + z(s-T).$$

Якщо $z < 0$, то

$$\mathcal{B}(z,s) = \frac{1}{2}\left(z + (T-s)\right)^2 = \frac{z^2}{2} + \frac{(T-s)^2}{2} - z(s-T).$$

Отже, функція Белмана має вигляд

$$\mathcal{B}(z,s) = \frac{z^2}{2} + \frac{(T-s)^2}{2} + |z|\,(s-T) = \frac{1}{2}\left(|z| + s - T\right)^2.$$

Вона є недиференційованою в точці $z = 0$.

Має місце така теорема.

Теорема 2.2 (достатні умови оптимальності)**.** *Нехай* $\mathcal{B}(z,t)$ *є неперервно диференційованим розв'язком рівняння* (2.14) *з граничною умовою* (2.15)*, при цьому керування* $u_*(z,t)$*, яке знайдене з умови*

$$\begin{aligned}&\langle grad_z \mathcal{B}(z,t), f(z,u_*(z,t),t)\rangle + f_0(z,u_*(z,t),t) = \\ &= \inf_{u\in\mathcal{U}(t)} \left\{\langle grad_z \mathcal{B}(z,t), f(z,u,t)\rangle + f_0(z,u,t)\right\},\end{aligned} \tag{2.22}$$

породжує при $z = x$ *єдиний розв'язок* $x_*(\cdot)$ *системи* (2.2) *і керування* $u_*(t) = u_*(x_*(t),t)$ *є допустимим. Тоді* $u_*(x,t)$ *є оптимальним керуванням задачі* (2.1)-(2.3) *з фіксованим лівим кінцем* $x(t_0) = x_0$.

Доведення. Оскільки при $x = z$ функція $u_*(x,t)$ є розв'язком задачі (2.22) і для $\mathcal{B}(z,t)$ має місце (2.14), то

$$\frac{\partial\mathcal{B}(x,t)}{\partial t} + \langle grad_x \mathcal{B}(x,t), f(x,u_*(x,t),t)\rangle + f_0(x,u_*(x,t),t) = 0.$$

Оскільки

$$\frac{\partial\mathcal{B}(x,t)}{\partial t} + \langle grad_x \mathcal{B}(x,t), f(x,u_*(x,t),t)\rangle = \frac{d\mathcal{B}(x,t)}{dt}$$

є похідною від функції Белмана в силу системи (2.2), то

$$\frac{d\mathcal{B}(x_*(t),t)}{dt} + f_0(x_*(t),u_*(t),t) = 0.$$

Інтегруємо останню рівність від t_0 до T. Одержуємо

$$\int_{t_0}^{T} \frac{d\mathcal{B}(x_*(t),t)}{dt}dt = -\int_{t_0}^{T} f_0(x_*(t),u_*(t),t)dt.$$

Оскільки $x_*(t_0) = x_0$, то

$$\int_{t_0}^{T} \frac{d\mathcal{B}(x_*(t),t)}{dt}dt = \mathcal{B}(x_*(T),T) - \mathcal{B}(x_*(t_0),t_0) =$$
$$= \Phi(x_*(T)) - \mathcal{B}(x_*(t_0),t_0) = \Phi(x_*(T)) - \mathcal{B}(x_0,t_0).$$

З останніх двох рівностей маємо

$$\mathcal{B}(x_0,t_0) = \int_{t_0}^{T} f_0(x_*(t),u_*(t),t)dt + \Phi(x_*(T)).$$

Отже, $\mathcal{B}(x_0,t_0) = \mathcal{I}(u_*,x_*)$.

Візьмемо тепер довільну допустиму пару $(u(\cdot),x(\cdot))$. В силу означення керування $u_*(x,t)$ ми маємо

$$\frac{d\mathcal{B}(x(t),t)}{dt} + f_0(x(t),u(t),t) \geq \frac{d\mathcal{B}(x_*(t),t)}{dt} + f_0(x_*(t),u_*(t),t) = 0.$$

Інтегруючи нерівність

$$\frac{d\mathcal{B}(x(t),t)}{dt} + f_0(x(t),u(t),t) \geq 0$$

від t_0 до T, одержуємо

$$\int_{t_0}^{T} \frac{d\mathcal{B}(x(t),t)}{dt}dt \geq -\int_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt.$$

Звідси, враховуючи, що

$$\int_{t_0}^{T} \frac{d\mathcal{B}(x_*(t),t)}{dt}dt = \Phi(x(T)) - \mathcal{B}(x(t_0),t_0),$$

отримуємо

$$\int_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt + \Phi(x(T)) \geq \mathcal{B}(x(t_0),t_0) = \mathcal{B}(x_0,t_0).$$

Отже, $\mathcal{I}(u,x) \geq \mathcal{B}(x_0,t_0) = \mathcal{I}(u_*,x_*)$. $\square$

2.5 Рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана для задачі керування з вільним часом

Припустимо, що задана система керування вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), \tag{2.23}$$

де $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – вектор керування, $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $f(x, u)$ – n-вимірна вектор-функція, що задовольняє умови існування, єдиності і продовжуваності розв'язку задачі Коші. Керування розглядається в класі кусково неперервних функцій, що належать в кожен момент часу t замкненій обмеженій множині $\mathcal{U}(t) \subseteq \mathbb{R}^m$.

Задача полягає у тому, щоб перевести систему (2.23) з заданої точки $x(0) = x_0$ в фіксоване положення $x(T) = x_T$ і мінімізувати функціонал

$$\mathcal{I}(u, x, T) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t))dt. \tag{2.24}$$

Тут $f_0(x, u)$ – неперервна обмежена функція, T – невідомий момент часу, який є параметром оптимізації. Для функції Белмана справджується рівність

$$\mathcal{B}(x_0) = \inf_u \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t))dt,$$

де мінімум береться за допустимими керуваннями. Згідно принципу оптимальності Белмана

$$\mathcal{B}(x_0) = \inf_u \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_0(x(t), u(t))dt + \mathcal{B}(x(t_0 + \Delta t)) \right\}. \tag{2.25}$$

Тут Δt – довільне додатне число, таке, що $t_0 + \Delta t < T$. Оскільки для системи (2.23) має місце неперервна залежність розв'язку за часовою змінною, то

$$x(t_0 + \Delta t) - x_0 = f(x_0, u(t_0))\Delta t + o(\Delta t),\ \Delta t \to 0.$$

Припускаючи, що функція Белмана є неперервно диференційованою, одержуємо

$$\mathcal{B}(x(t_0 + \Delta t), t) = \mathcal{B}(x_0) +$$
$$+ \langle grad_x \mathcal{B}(x_0), x(t_0 + \Delta t) - x_0 \rangle + o(\Delta t).$$

Підставляючи останні два вирази в (2.25) і ділячи отримане на Δt, маємо

$$\inf_u \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_0(x(t), u(t))dt + \right.$$

$$+\left\langle grad_x \mathcal{B}(x_0), f(x_0, u(t_0))\right\rangle + \left.\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\} = 0,\ \Delta t \to 0.$$

Переходячи до границі в останньому співвідношенні, отримуємо рівність

$$\inf_u \left\{f_0(x_0, u(t_0)) + \left\langle grad_x \mathcal{B}(x_0), f(x_0, u(t_0))\right\rangle\right\} = 0.$$

Підставляючи замість x_0 довільну точку z, а замість t_0 довільне значення часової змінної t, одержуємо

$$\begin{aligned} &\inf_{u \in U(t)} \left\{f_0(z, u) + \left\langle grad_z \mathcal{B}(z), f(z, u)\right\rangle\right\} = 0, \\ &\mathcal{B}(z) = 0,\ t = T,\ z = x_T. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Співвідношення (2.26) називається диференціальним рівнянням Гамільтона-Якобі-Белмана задачі (2.23)-(2.24).

Якщо ставиться задача про переведення системи (2.23) з заданої точки $x(0) = x_0$ в фіксоване положення $x(T) = x_T$ за мінімально можливий час, то тоді диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана для задачі швидкодії має вигляд

$$\begin{aligned} &\inf_{u \in \mathcal{U}(t)} \left\langle grad_z \mathcal{B}(z), f(z, u)\right\rangle = -1, \\ &\mathcal{B}(z) = 0,\ t = T,\ z = x_T. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Рівняння (2.27) випливає з рівняння (2.26) при $f_0(z, u) = 1$.

2.6 Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним функціоналом

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t) \tag{2.28}$$

за умови

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.29}$$

Тут $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – вектор керування, $A(t)$ – $n \times n$ – матриця з неперервними компонентами, $C(t)$ – $n \times m$-матриця з неперервними компонентами.

Задача оптимального керування системою (2.28) з умовою Коші (2.29) полягає у знаходженні керування $u_*(\cdot)$, яке б мінімізувало квадратичний функціонал

$$\mathcal{I}(u,x) = \int_{t_0}^{T} \{\langle N(t)x(t), x(t)\rangle + \langle M(t)u(t), u(t)\rangle\} \, dt + \\ + \langle P_0 x(T), x(T)\rangle . \tag{2.30}$$

Тут $M(t)$ є додатновизначеною симетричною матрицею, $N(t)$, P_0 є невід'ємновизначеними симетричними матрицями, причому $N(t)$, P_0 – матриці розмірності $n \times n$, $M(t)$ – матриця розмірності $m \times m$ і матриці $N(t)$, $M(t)$ є неперервними за $t \in [t_0, T]$. Позначимо за $\mathcal{B}(z,s)$ функцію Белмана і запишемо для задачі (2.28)-(2.30) рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана у диференціальній формі

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \min_u \{\langle grad_z \mathcal{B}(z,s), A(s)z + C(s)u\rangle + \\ + \langle N(s)z, z\rangle + \langle M(s)u, u\rangle\} = 0, \tag{2.31}$$

$$\mathcal{B}(z,T) = \langle P_0 z, z\rangle . \tag{2.32}$$

Розв'яжемо екстремальну задачу

$$\min_u \mathcal{H}(z,u,s), \tag{2.33}$$

де

$$\mathcal{H}(z,u,s) = \langle grad_z \mathcal{B}(z,s), A(s)z + C(s)u\rangle + \langle N(s)z, z\rangle + \langle M(s)u, u\rangle .$$

Запишемо необхідну умову екстремуму

$$\frac{\partial \mathcal{H}(z,u,s)}{\partial u} = 0$$

і отримаємо

$$C^*(s) grad_z \mathcal{B}(z,s) + 2M(s)u = 0.$$

Звідси

$$u_*(s) = -\frac{1}{2} M^{-1}(s) C^*(s) grad_z \mathcal{B}(z,s). \tag{2.34}$$

Підстановка (2.34) у (2.31) дає

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \langle A(s)z, grad_z \mathcal{B}(z,s)\rangle - \\ -\frac{1}{2} \left\langle C(s)M^{-1}(s)C^*(s) grad_z \mathcal{B}(z,s), grad_z \mathcal{B}(z,s)\right\rangle + \langle N(s)z, z\rangle + \\ +\frac{1}{4} \left\langle C(s)(M^{-1}(s))^* M(s) M^{-1}(s) C^*(s) grad_z \mathcal{B}(z,s), grad_z \mathcal{B}(z,s)\right\rangle = 0.$$

Зводячи подібні доданки, отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathcal{B}(z,s)}{\partial s}+\langle A(s)z, grad_z\mathcal{B}(z,s)\rangle+\langle N(s)z,z\rangle-\\&-\frac{1}{4}\left\langle C(s)M^{-1}(s)C^*(s)grad_z\mathcal{B}(z,s), grad_z\mathcal{B}(z,s)\right\rangle=0.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Функцію Белмана будемо шукати у вигляді квадратичної функції

$$\mathcal{B}(z,s)=\langle P(s)z,z\rangle\,,\tag{2.36}$$

де $P(t)$– $n\times n$ - абсолютно неперервна матриця, яку необхідно визначити. Тоді, враховуючи, що

$$\frac{\partial\mathcal{B}(z,s)}{\partial s}=\left\langle\frac{dP(s)}{ds}z,z\right\rangle,\ grad_z\mathcal{B}(z,s)=(P(s)+P^*(s))z,$$

з (2.35) отримуємо

$$\begin{aligned}&\left\langle\frac{dP(s)}{ds}z,z\right\rangle+\langle P^*(s)A(s)z,z\rangle+\langle P(s)A(s)z,z\rangle+\langle N(s)z,z\rangle-\\&-\frac{1}{4}\left\langle(P(s)+P^*(s))z, C(s)M^{-1}(s)C^*(s)(P(s)+P^*(s))z\right\rangle=0.\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи, що

$$\langle P^*(s)A(s)z,z\rangle=\langle A^*(s)P(s)z,z\rangle\,,$$

маємо

$$\begin{aligned}&\left\langle\frac{dP(s)}{ds}+P(s)A(s)+A^*(s)P(s)+N(s)-\right.\\&\left.-\frac{1}{4}(P(s)+P^*(s))C(s)M^{-1}(s)C^*(s)(P(s)+P^*(s))z,z\right\rangle=0.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Для того, щоб мала місце рівність (2.37), покладаємо

$$\begin{aligned}&\frac{dP(s)}{ds}+P(s)A(s)+A^*(s)P(s)+N(s)-\\&-\frac{1}{4}(P(s)+P^*(s))C(s)M^{-1}(s)C^*(s)(P(s)+P^*(s))=0.\end{aligned}\tag{2.38}$$

З умови (2.32) випливає

$$P(T)=P_0.\tag{2.39}$$

Транспонуючи (2.38) та (2.39), врахувавши, що матриця P_0 є симетрична, маємо

$$\frac{dP^*(s)}{ds} + P^*(s)A(s) + A^*(s)P^*(s) + N(s) -$$
$$-\frac{1}{4}(P(s) + P^*(s))C(s)M^{-1}(s)C^*(s)(P(s) + P^*(s)) = 0, \; P^*(T) = P_0.$$

Порівнявши останні два співвідношення з (2.38) та (2.39), помічаємо, що матриці $P(s)$ і $P^*(s)$ задовольняють одному і тому ж диференціальному рівнянню з однаковими умовами Коші. Тому $P(s) = P^*(s)$. Формули (2.38), (2.39) записуються так

$$\begin{aligned} \frac{dP(s)}{ds} + P(s)A(s) + A^*(s)P(s) + N(s) - \\ - P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s) = 0, \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$P(T) = P_0. \tag{2.41}$$

Співвідношення (2.40) є *матричним диференціальним рівнянням Ріккаті.* Знайшовши з (2.40), (2.41) матрицю $P(s)$, отримуємо функцію Белмана

$$\mathcal{B}(z, s) = \langle P(s)z, z \rangle .$$

При цьому з (2.34) знаходимо оптимальне керування

$$u_*(x(t), t) = -M^{-1}(t)C^*(t)P(t)x(t), \tag{2.42}$$

яке є керуванням з оберненим зв'язком. Використовуючи властивості функції Белмана, отримуємо оптимальне значення функціоналу (2.30)

$$\mathcal{I}_* = \mathcal{I}(u_*, x_*) = \langle P(t_0)x_0, x_0 \rangle .$$

Алгоритм 2.2. *Задаємо матриці $M(t)$, $N(t)$, P_0, $A(t)$, $C(t)$, $t \in [t_0, T]$, точку x_0.*

Крок 1. Розв'язуємо матричне диференціальне рівняння (2.40), (2.41). *Знаходимо матрицю $P(s)$.*

Крок 2. Розв'язуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = [A(t) - C(t)M^{-1}(t)C^*(t)P(t)]x(t)$$

за умови $x(t_0) = x_0$, яка отримана при підстановці (2.42) *в* (2.28). *Будуємо оптимальну траєкторію $x_*(t)$, оптимальне керування* (2.42) *і оптимальне значення критерію якості $\mathcal{I}_* = \langle P(t_0)x_0, x_0 \rangle$.*

2.7 Оптимальне за швидкодією гасіння кутових швидкостей мікросупутника

Розглянемо динамічну систему вигляду

$$\mathcal{J}\frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) \times \mathcal{J}\omega(t) = u(t), \tag{2.43}$$

де $\times$–знак векторного добутку, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$ – вектор кутової швидкості мікросупутника, $u = (u_1, u_2, u_3)^*$ – вектор керуючих параметрів, $\mathcal{J} = \mathcal{J}^*$ – додатновизначена матриця розмірності 3×3, яка називається тензором інерції. Задача полягає в тому, щоб мінімізувати час переходу мікросупутника з довільного положення $\omega(0) = \omega_0$ на термінальну множину, що задається нерівністю

$$\|\mathcal{J}\omega\| \leq \varepsilon. \tag{2.44}$$

Робимо заміну змінних $p = \mathcal{J}\omega$. Тоді система (2.43) матиме вигляд

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\left(\mathcal{J}^{-1}p(t)\right) \times p(t) + u(t).$$

При цьому $p(0) = p_0$, $p_0 = \mathcal{J}\omega_0$, а обмеження (2.44) зведуться до таких, що задаються нерівністю $\|p\| \leq \varepsilon$.

Нехай $T \geq 0$ - перший момент, для якого $p_1^2(T) + p_2^2(T) + p_3^2(T) = \varepsilon^2$. Позначимо функцію Белмана

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(p_1, p_2, p_3),$$

яка вибирається залежною тільки від фазових координат (p_1, p_2, p_3).

Згідно (2.27), рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана запишеться так

$$\inf_{\|u\|\leq\rho}\left\{-\left\langle\left(J^{-1}p\right) \times p, grad\mathcal{B}(p)\right\rangle + \langle grad\mathcal{B}(p), u\rangle\right\} = -1, \tag{2.45}$$

при цьому

$$\mathcal{B}(p) = 0 \tag{2.46}$$

в момент $t = T$. Знайдемо

$$\min_{\|u\|\leq\rho}\langle grad\mathcal{B}(p), u\rangle = -\max_{\|u\|\leq\rho}\langle -grad\mathcal{B}(p), u\rangle =$$
$$= -c\left(K_\rho(0), -grad\mathcal{B}(p)\right) = -\rho\left\|grad\mathcal{B}(p)\right\|,$$

причому мінімум досягається в точці

$$u_* = -\rho\frac{grad\mathcal{B}(p)}{\|grad\mathcal{B}(p)\|}. \tag{2.47}$$

Тут $c\,(A,\psi) = \sup_{x\in A}\langle x,\psi\rangle$ – опорна функція множини $A\subset\mathbb{R}^n$, $\psi\in\mathbb{R}^n$ [5, 20]. Підстановка (2.47) в (2.45) приводить до співвідношення

$$-\left\langle grad\mathcal{B}(p), \left(\mathcal{J}^{-1}p\right)\times p\right\rangle - \rho\left\langle grad\mathcal{B}(p), \frac{grad\mathcal{B}(p)}{\|grad\mathcal{B}(p)\|}\right\rangle = -1.$$

Звідси отримуємо рівняння в частинних похідних

$$\left\langle grad\mathcal{B}(p), \left(\mathcal{J}^{-1}p\right)\times p\right\rangle + \rho\,\|grad\mathcal{B}(p)\| = 1. \tag{2.48}$$

Розв'яжемо рівняння (2.48), знайшовши функцію $\mathcal{B}(p)$, яка задовольняє таким умовам

$$\begin{cases}\langle grad\mathcal{B}(p), (\mathcal{J}^{-1}p)\times p\rangle = 0;\\ \rho\,\|grad\mathcal{B}(p)\| = 1.\end{cases} \tag{2.49}$$

Перше рівняння системи (2.49) можна записати так

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial p_1} & \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial p_2} & \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial p_3}\\ q_1 & q_2 & q_3\\ p_1 & p_2 & p_3\end{vmatrix} = 0, \tag{2.50}$$

де $(q_1, q_2, q_3)^* = \mathcal{J}^{-1}p$. Вибираємо функцію Белмана так, щоб

$$grad\mathcal{B}(p) = h(p)p. \tag{2.51}$$

Тут $h(p)$ – деяка скалярна функція, яка підлягає визначенню. Тоді співвідношення (2.50) буде мати місце. Підставляючи (2.51) в друге рівняння системи (2.49), отримаємо

$$h(p) = \frac{1}{\rho\,\|p\|}.$$

Звідси

$$grad\mathcal{B}(p) = \frac{p}{\rho\,\|p\|}. \tag{2.52}$$

З (2.52) випливає

$$\mathcal{B}(p) = \frac{1}{\rho}\left(\|p\| + c\right),$$

де c – довільна стала. Використовуючи умову $p_1^2(T) + p_2^2(T) + p_3^2(T) = \varepsilon^2$ та співвідношення (2.46), знаходимо $c = -\varepsilon$. Отже, функція Белмана має вигляд

$$\mathcal{B}(p) = \frac{1}{\rho}\left(\|p\| - \varepsilon\right). \tag{2.53}$$

Враховуючи (2.47), (2.52) та заміну $p = J\omega$, отримуємо оптимальну функцію керування

$$u_*(\omega) = -\rho \frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|}. \tag{2.54}$$

Алгоритм 2.3. *Задаємо $\varepsilon > 0$, початкові умови $\omega(0) = \omega_0$, тензор інерції $\mathcal{J}$.*

Крок 1. Якщо $\|\mathcal{J}\omega_0\| < \varepsilon$, то переходимо на кінець алгоритму.

Крок 2. Оцінюємо час перехідного процесу

$$T = \mathcal{B}(p_0) = \frac{1}{\rho}\left(\|p_0\| - \varepsilon\right),$$

де $p_0 = J\omega_0$.

Крок 3. Інтегруємо систему

$$\mathcal{J}\frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) \times \mathcal{J}\omega(t) = u_*(\omega(t)),\ \omega(0) = \omega_0,\ t \in [0, T]$$

де керування

$$u_*(\omega) = -\rho \frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|}.$$

Знаходимо оптимальний режим $\omega_*(t)$ і оптимальне керування $u_*(t) = u_*(\omega_*(t))$.

Література: [2, 7, 12, 13, 27]

Лекція 3

Множина досяжності і функція Белмана

3.1 Принцип оптимальності для задачі оптимального керування з функціоналом, що залежить від початкового стану

Нехай $X(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ – фазові обмеження, $\mathcal{U}(t) \subseteq \mathbb{R}^m$ – обмеження на керування, при цьому множини $X(t)$, $\mathcal{U}(t)$ є замкненими, $t \in [t_0, T]$. Задача оптимального керування полягає в знаходженні точної нижньої грані функціоналу

$$\mathcal{I}(u, x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(t_0)) \tag{3.1}$$

за умов

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \tag{3.2}$$

$$x(t) \in X(t),\ u(t) \in \mathcal{U}(t),\ t \in [t_0, T]. \tag{3.3}$$

Тут $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – функція керування, $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $f(x, u, t)$ – n-вимірна вектор-функція, що задовольняє умови існування, єдиності і продовжуваності розв'язку задачі Коші [1], $f_0(x, u, t)$, $\Phi(x)$ – неперервні функції. Розв'язком задачі (3.1)-(3.3) є допустима пара (u_*, x_*), яка доставляє значення точної нижньої грані функціоналу (3.1) за умов (3.2)-(3.3). Керування u вибирають, як правило, з класу кусково-неперервних функцій, або з класу вимірних функцій.

[1] наприклад, задовольняє умови теореми Каратеодорі, умову Ліпшиця за фазовою змінною і є квазілінійною [23]

Розглянемо *допоміжну задачу* до задачі (3.1) -(3.3). Зафіксуємо $s \in (t_0, T)$. Задача полягає в тому. щоб мінімізувати функціонал

$$\mathcal{I}_s(u, x) = \int_{t_0}^{s} f_0(x, u, t)dt + \Phi(x(t_0)) \tag{3.4}$$

при умовах

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t),\ x(s) = x_*(s), \tag{3.5}$$

$$x(t) \in X(t),\ u(t) \in \mathcal{U}(t),\ t \in [t_0, s]. \tag{3.6}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.1 (принцип оптимальності Белмана)**.** *Якщо пара* $(\tilde{u}(t), \tilde{x}(t))$ *є розв'язком задачі* (3.4) - (3.6)*, то вона співпадає з розв'язком задачі* (3.1) -(3.3) *на відрізку* $t \in [t_0, s]$.

Доведення проводиться аналогічно до доведення теореми 2.1, стор. 19.

Функція

$$\mathcal{B}(z, s) = \inf_u \left\{ \int_{t_0}^{s} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(t_0)) \right\}, \tag{3.7}$$

що визначена на розв'язках системи (3.2) при початковій умові $x(s) = z$, називається *функцією Белмана* задачі (3.1)-(3.3). Тут $z \in X(s)$, $x(\cdot)$ – розв'язок системи (3.2) при допустимому керуванні $u(t) \in \mathcal{U}(t)$, $x(t) \in X(t)$, $x(s) = z$, $t \in [t_0, s]$, інфінум в правій частині співвідношення (3.7) береться за допустимими керуваннями при $t \in [t_0, s]$.

3.2 Рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана

Виходячи з означення функції Белмана (3.4), принципу оптимальності Белмана та властивостей інтеграла, отримуємо

$$\mathcal{B}(x_*(s + \Delta s), s + \Delta s) = \int_{t_0}^{s+\Delta s} f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau)d\tau + \Phi(x_*(t_0)) =$$

$$= \int_{t_0}^{s} f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau)d\tau + \Phi(x_*(t_0)) + \int_{s}^{s+\Delta t} f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau)d\tau =$$

$$= \mathcal{B}(z, s) + \int_{s}^{s+\Delta s} f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau)d\tau.$$

Тут Δs – довільне додатне число, таке, що $t_0 < s < s + \Delta s < T$, $(x_*(t), u_*(t))$ – розв'язок задачі (3.1)-(3.3), $x_*(s) = z$. Тому

$$\mathcal{B}(x_*(s+\Delta s), s+\Delta s) - \mathcal{B}(z,s) - \int_s^{s+\Delta s} f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau) d\tau = 0. \quad (3.8)$$

За означенням функції Белмана на довільній допустимій парі $(x(t), u(t))$ такій, що $x(s) = z$ маємо

$$\mathcal{B}(x(s+\Delta s), s+\Delta s) \leq \int_{t_0}^{s} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x(t_0)) +$$

$$+ \int_s^{s+\Delta s} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau.$$

Тому

$$\mathcal{B}(x(s+\Delta s), s+\Delta s) - \mathcal{B}(z,s) - \int_s^{s+\Delta s} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \leq 0. \quad (3.9)$$

У такий спосіб

$$\sup_u \left\{ \mathcal{B}(x(s+\Delta s), s+\Delta s) - \mathcal{B}(z,s) - \int_s^{s+\Delta s} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} = 0. \quad (3.10)$$

Тут точна верхня межа береться за допустимими керуваннями задачі (3.1)-(3.3) за умови $x(s) = z$. Рівняння (3.10) називається *рівнянням Белмана задачі* (3.1)-(3.3) *в інтегральній формі.*

Припустимо, що функція Белмана (3.4) є диференційованою, $f_0(x,u,t)$, $\Phi(x)$, $f(x,u,t)$ є неперервними за своїми змінними функціями. Оскільки

$$\mathcal{B}(x(s+\Delta s), s+\Delta s) = \mathcal{B}(z,s) + \frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s}\Delta s +$$

$$+ \langle grad_z \mathcal{B}(z,s), x(s+\Delta s) - z \rangle + o(\Delta s),$$

$\Delta s \to 0$, то з співвідношення (3.8) випливає

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s}\Delta s + \langle grad_z \mathcal{B}(z,s), x_*(s+\Delta s) - z \rangle -$$

$$- \int_s^{s+\Delta s} f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau) d\tau + o(\Delta s) = 0.$$

Поділивши останній вираз на додатне Δs, при $\Delta s \to 0$ отримуємо

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \left\langle grad_z \mathcal{B}(z,s), \frac{dx_*(s)}{ds} \right\rangle - f_0(x_*(s), u_*(s), s) = 0.$$

Так як $\frac{dx_*(s)}{ds} = f(x_*(s), u_*(s), s)$, $x_*(s) = z$, то

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \langle grad_z \mathcal{B}(z,s), f(z, u_*(s), s)\rangle - f_0(z, u_*(s), s) = 0.$$

З (3.9) випливає, що на довільній допустимій парі $(x(t), u(t))$ такій, що $x(s) = z$ маємо

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \langle grad_z \mathcal{B}(z,s), f(z, u(s), s)\rangle - f_0(z, u(s), s) \leq 0.$$

Тому

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \sup_{u \in \mathcal{U}(s)} \{\langle grad_z \mathcal{B}(z,s), f(z, u, s)\rangle - f_0(z, u, s)\} = 0. \tag{3.11}$$

З означення функції Белмана випливає, що при $t = t_0$ справджується рівність

$$\mathcal{B}(z, t_0) = \Phi(z). \tag{3.12}$$

Співвідношення вигляду (3.11)-(3.12) називається *диференціальним рівнянням Гамільтона-Якобі-Белмана* задачі оптимального керування (3.1)-(3.3).

3.3 Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості

3.3.1 Задача 1

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t),\ t \in [t_0, T], \tag{3.13}$$

за умови

$$x(T) = x_T. \tag{3.14}$$

Тут $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – вектор керування, $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $A(t)$ – $n \times n$ - матриця з неперервними компонентами, $C(t)$ – $n \times m$-матриця з неперервними компонентами.

Задача полягає у знаходженні керування $u_*(\cdot)$, яке б мінімізувало квадратичний функціонал

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(u,x) = \int_{t_0}^{T} \{\langle N(t)x(t), x(t)\rangle + \langle M(t)u(t), u(t)\rangle\} \, dt + \\ + \langle P_0 x(t_0), x(t_0)\rangle . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Тут $M(t)$ є додатновизначеною симетричною матрицею, $N(t)$, P_0 є невід'ємновизначеними симетричними матрицями, причому $N(t)$, P_0– матриці розмірності $n\times n$, $M(t)$ – матриця розмірності $m\times m$ і матриці $N(t)$, $M(t)$ є неперервними за $t \in [t_0, T]$. Позначимо за $\mathcal{B}(z,s)$ функцію Белмана і запишемо для задачі (3.13)-(3.15) рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана у диференціальній формі

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \max\nolimits_u \{\langle grad_z \mathcal{B}(z,s), A(s)z + C(s)u\rangle -\\ - \{\langle N(s)z, z\rangle + \langle M(s)u, u\rangle\}\} = 0,\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\mathcal{B}(z, t_0) = \langle P_0 z, z\rangle\,. \tag{3.17}$$

Задача (3.16), (3.17) розв'язується аналогічно до знаходження розв'язку рівняння (2.31), (2.32) (стор. 33). У такий спосіб функція Белмана має вигляд

$$\mathcal{B}(z,s) = \langle P(s)z, z\rangle\,,$$

де $P(s)$ – $n\times n$ - неперервно диференційована матриця, яка задовольняє *матричне диференціальне рівняння Ріккаті*

$$\begin{aligned}&\frac{dP(s)}{ds} + P(s)A(s) + A^*(s)P(s) +\\ &+ P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s) = N(s),\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$P(t_0) = P_0, \tag{3.19}$$

оптимальне керування

$$u_*(x(t), t) = M^{-1}(t)C^*(t)P(t)x(t),$$

оптимальне значення функціоналу (3.15) $\mathcal{J}_* = \langle P(T)x_T, x_T\rangle$.

3.3.2 Задача 2

Розглянемо систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t),\ t \in [t_0, T], \tag{3.20}$$

при умові

$$x(T) = x_T. \tag{3.21}$$

Тут $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – вектор керування, $x = (x_1, ..., x_n)^*$– вектор фазових координат, $A(t)$ – $n \times n$ - матриця з неперервними компонентами, $C(t)$– $n \times m$-матриця з неперервними компонентами.

Задача полягає у знаходженні керування $u_*(\cdot)$, яке б мінімізувало квадратичний функціонал

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(u,x) = \int_{t_0}^{T} &\{\langle N(t)\left(G(t)x(t) - y(t)\right), G(t)x(t) - y(t)\rangle + \\ &+ \langle M(t)\left(u(t) - v(t)\right), u(t) - v(t)\rangle\} \, dt + \\ &+ \langle P_0\left(x(t_0) - x_0\right), x(t_0) - x_0\rangle . \end{aligned} \tag{3.22}$$

Тут $M(t)$ є додатновизначеною симетричною матрицею розмірності $m \times m$, $N(t)$, P_0 є невід'ємновизначеними симетричними матрицями розмірностей $k \times k$ і $n \times n$ відповідно. Матриця $G(t)$ має розмірність $k \times n$. Матриці $N(t)$, $M(t)$ і $G(t)$ є неперервними за $t \in [t_0, T]$. Функції $v(t) = (v_1(t), ..., v_m(t))^*$, $y(t) = (y_1(t), ..., y_k(t))^*$ є інтегрованими з квадратом на $[t_0, T]$, точки x_0, x_T з $\mathbb{R}^n$ є заданими.

Позначимо за $\mathcal{B}(z,s)$ функцію Белмана і запишемо для задачі (3.20)-(3.22) рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана у диференціальній формі

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \max_u \{&\langle grad_z \mathcal{B}(z,s), A(s)z + C(s)u\rangle - \\ &- \langle N(s)\left(G(s)z - y(s)\right), G(s)z - y(s)\rangle + \\ &+ \langle M(s)\left(u - v(s)\right), u - v(s)\rangle\} = 0, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\mathcal{B}(z, t_0) = \langle P_0\left(z - x_0\right), z - x_0\rangle . \tag{3.24}$$

Далі необхідно розв'язати екстремальну задачу

$$\max_u \mathcal{H}(z,u,s) \tag{3.25}$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z,u,s) = \langle grad_z \mathcal{B}(z,s), A(s)z + C(s)u\rangle - \\ - \langle N(s)\left(G(s)z - y(s)\right), G(s)z - y(s)\rangle + \langle M(s)\left(u - v(s)\right), u - v(s)\rangle . \end{aligned}$$

Запишемо необхідні умови екстремуму

$$\frac{\partial \mathcal{H}(z,u,s)}{\partial u} = 0$$

і отримаємо

$$C^*(s) grad_z \mathcal{B}(z,s) - 2M(s)(u - v(s)) = 0.$$

Звідси

$$u_*(s) = v(s) + \frac{1}{2} M^{-1}(s) C^*(s) grad_z \mathcal{B}(z,s). \tag{3.26}$$

Підставимо (3.26) у (3.23) і матимемо

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \langle A(s)z, grad_z \mathcal{B}(z,s)\rangle + \langle C(s)v(s), grad_z \mathcal{B}(z,s)\rangle +$$
$$+\frac{1}{4}\left\langle C(s)M^{-1}(s)C^*(s) grad_z \mathcal{B}(z,s), grad_z \mathcal{B}(z,s)\right\rangle -$$
$$- \langle N(s)\left(G(s)z - y(s)\right), G(s)z - y(s)\rangle = 0.$$

Функцію Белмана будемо шукати у вигляді

$$\mathcal{B}(z,s) = \langle P(s)z, z\rangle + \langle q(s), z\rangle + r(s),$$

де $P(s)$– симетрична $n \times n$-матриця, $q(s) = (q_1(s), ..., q_n(s))^*$, $r(s)$ – функції з класу абсолютно неперервних, які необхідно визначити, $s \in [t_0, T]$. Тоді, враховуючи, що

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} = \left\langle \frac{dP(s)}{ds} z, z \right\rangle + \left\langle \frac{dq(s)}{ds}, z \right\rangle + \frac{dr(s)}{ds},$$

$$grad_z \mathcal{B}(z,s) = (P(s) + P^*(s))z + q(s) = 2P(s)z + q(s),$$

з (3.23) отримуємо

$$\left\langle \frac{dP(s)}{ds} z, z \right\rangle + \left\langle \frac{dq(s)}{ds}, z \right\rangle + \frac{dr(s)}{ds} +$$
$$+ \langle P^*(s)z, A(s)z\rangle + \langle P(s)z, A(s)z\rangle + \langle q(s), A(s)z\rangle +$$
$$+2\langle P(s)z, C(s)v(s)\rangle + \langle q(s), C(s)v(s)\rangle +$$
$$+ \left\langle P(s)z, C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)z\right\rangle + \left\langle P(s)z, C(s)M^{-1}(s)C^*(s)q(s)\right\rangle +$$
$$+\frac{1}{4}\left\langle q(s), C(s)M^{-1}(s)C^*(s)q(s)\right\rangle - \langle N(s)G(s)z, G(s)z\rangle +$$
$$+2\langle N(s)G(s)z, y(s)\rangle - \langle N(s)y(s), y(s)\rangle = 0.$$

Групуючи відповідні доданки, одержуємо,

$$\Big\langle \Big(\frac{dP(s)}{ds} + P(s)A(s) + A^*(s)P(s) +$$
$$+ P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s) - G^*(s)N(s)G(s) \Big) z, z \Big\rangle +$$
$$+ \Big\langle \frac{dq(s)}{ds} + A^*(s)q(s) + 2P^*(s)C(s)v(s) +$$
$$+ P^*(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)q(s) + 2G^*(s)N(s)y(s), z \Big\rangle +$$
$$+ \frac{dr(s)}{ds} + \langle q(s), C(s)v(s) \rangle +$$
$$+ \frac{1}{4} \big\langle q(s), C(s)M^{-1}(s)C^*(s)q(s) \big\rangle - \langle N(s)y(s), y(s) \rangle = 0.$$

Оскільки вектор z є довільним, то маємо таку систему для знаходження $P(s)$, $q(s)$, $r(s)$

$$\begin{aligned} &\frac{dP(s)}{ds} + P(s)A(s) + A^*(s)P(s) + \\ &\quad + P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s) = G^*(s)N(s)G(s), \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dq(s)}{ds} + \big(A^*(s) + P^*(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s) \big) q(s) + \\ &\quad + 2 \left(P^*(s)C(s)v(s) + G^*(s)N(s)y(s) \right) = 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dr(s)}{ds} + \langle q(s), C(s)v(s) \rangle + \\ &+ \frac{1}{4} \big\langle q(s), C(s)M^{-1}(s)C^*(s)q(s) \big\rangle - \langle N(s)y(s), y(s) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Представимо функцію Белмана $\mathcal{B}(z,s) = \langle P(s)z, z \rangle + \langle q(s), z \rangle + r(s)$ у такій формі

$$\mathcal{B}(z,s) = \langle Q(s) \left(z - h(s) \right), z - h(s) \rangle + k(s), \tag{3.30}$$

де $P(s)$– симетрична $n \times n$-матриця, $h(s) = (h_1(s), ..., h_n(s))^*$, $k(s)$ – скалярна функція. Тоді

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(z,s) &= \langle Q(s) \left(z - h(s) \right), z - h(s) \rangle + k(s) = \\ &= \langle Q(s)z, z \rangle - 2 \langle Q(s)z, h(s) \rangle + \langle Q(s)h(s), h(s) \rangle + k(s) = \\ &= \langle P(s)z, z \rangle + \langle q(s), z \rangle + r(s). \end{aligned}$$

Порівнюючи в останній рівності відповідні доданки, одержуємо

$$Q(s) = P(s), q(s) = -2P(s)h(s), r(s) = \langle P(s)h(s), h(s) \rangle + k(s).$$

Знайдемо рівняння для знаходження $h(s)$ і $k(s)$. З $q(s) = -2P(s)h(s)$ випливає

$$h(s) = -\frac{1}{2}P^{-1}(s)q(s).$$

Позначимо $R(s) = P^{-1}(s)$. Оскільки $R(s)P(s) = I$, то

$$\frac{d\left(R(s)P(s)\right)}{ds} = 0.$$

Звідси

$$\frac{dR(s)}{ds}P(s) + R(s)\frac{dP(s)}{ds} = 0.$$

Далі

$$\frac{dR(s)}{ds} = -R(s)\frac{dP(s)}{ds}P^{-1}(s) = -R(s)\frac{dP(s)}{ds}R(s).$$

Підставляємо в останній вираз (3.27). Одержуємо

$$\begin{gathered}\frac{dR(s)}{ds} = -R(s)\left[G^*(s)N(s)G(s) - P(s)A(s)-\right.\\ \left.-A^*(s)P(s) - P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)\right]R(s).\end{gathered}$$

Звідси

$$\begin{gathered}\frac{dR(s)}{ds} = A(s)R(s) + R(s)A^*(s)+\\ + C(s)M^{-1}(s)C^*(s) - R(s)G^*(s)N(s)G(s)R(s).\end{gathered} \tag{3.31}$$

Отже, $h(s) = -\frac{1}{2}R(s)q(s)$ і, підставляючи (3.27) і (3.31), отримуємо

$$\begin{gathered}\frac{dh(s)}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{dR(s)}{ds}q(s) - \frac{1}{2}R(s)\frac{dq(s)}{ds} =\\ = -\frac{1}{2}\left[A(s)R(s) + R(s)A^*(s) + C(s)M^{-1}(s)C^*(s)-\right.\\ \left.-R(s)G^*(s)N(s)G(s)R(s)\right]q(s)+\\ +\frac{1}{2}R(s)\left[\left(A^*(s) + P^*(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)\right)q(s)+\right.\\ \left.+2\left(P^*(s)C(s)v(s) + G^*(s)N(s)y(s)\right)\right].\end{gathered}$$

Підставляємо $q(s) = -2P(s)h(s)$ і одержуємо

$$\frac{dh(s)}{ds} = \left[A(s)R(s) + R(s)A^*(s) + C(s)M^{-1}(s)C^*(s) - \right.$$
$$\left. - R(s)G^*(s)N(s)G(s)R(s)\right] P(s)h(s) -$$
$$-R(s)\left(A^*(s) + P^*(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)\right) P(s)h(s) +$$
$$+C(s)v(s) + R(s)G^*(s)N(s)y(s) =$$
$$= A(s)h(s) + R(s)A^*(s)P(s)h(s) +$$
$$+C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)h(s) - R(s)G^*(s)N(s)G(s)h(s) -$$
$$-R(s)A^*(s)P(s)h(s) + P^*(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)h(s) +$$
$$+C(s)v(s) + R(s)G^*(s)N(s)y(s).$$

Зводячи в останній рівності подібні доданки, отримуємо

$$\frac{dh(s)}{ds} = A(s)h(s) + R(s)G^*(s)N(s)\left(y(s) - G(s)h(s)\right) + C(s)v(s). \quad (3.32)$$

Для $k(s)$ диференціальне рівняння шукаємо з співвідношення

$$k(s) = r(s) - \langle P(s)h(s), h(s)\rangle .$$

Звідси

$$\frac{dk(s)}{ds} = \frac{dr(s)}{ds} - \left\langle \frac{dP(s)}{ds}h(s), h(s)\right\rangle - \left\langle P(s)\frac{dh(s)}{ds}, h(s)\right\rangle -$$
$$-\left\langle P(s)h(s), \frac{dh(s)}{ds}\right\rangle = \frac{dr(s)}{ds} - \left\langle \frac{dP(s)}{ds}h(s), h(s)\right\rangle -$$
$$-\left\langle \frac{dh(s)}{ds}, P^*(s)h(s)\right\rangle - \left\langle P(s)h(s), \frac{dh(s)}{ds}\right\rangle =$$
$$= \frac{dr(s)}{ds} - \left\langle \frac{dP(s)}{ds}h(s), h(s)\right\rangle - 2\left\langle P(s)h(s), \frac{dh(s)}{ds}\right\rangle .$$

Підставляємо (3.29), (3.27) і (3.32) в останнє співвідношення

$$\frac{dk(s)}{ds} = -\langle q(s), C(s)v(s)\rangle -$$
$$-\frac{1}{4}\left\langle q(s), C(s)M^{-1}(s)C^*(s)q(s)\right\rangle + \langle N(s)y(s), y(s)\rangle -$$
$$-\langle (G^*(s)N(s)G(s) - P(s)A(s) - A^*(s)P(s) -$$
$$-P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)\big) h(s), h(s)\rangle -$$
$$-2\langle P(s)h(s), A(s)h(s) + R(s)G^*(s)N(s)\left(y(s) - G(s)h(s)\right) + C(s)v(s)\rangle .$$

Підставляємо далі $q(s) = -2P(s)h(s)$. Маємо

$$\frac{dk(s)}{ds} = 2\left\langle P(s)h(s), C(s)v(s)\right\rangle - \left\langle P(s)h(s), C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)h(s)\right\rangle +$$
$$+\left\langle N(s)y(s), y(s)\right\rangle - \left\langle \left(G^*(s)N(s)G(s) - P(s)A(s)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-A^*(s)P(s) - P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)\right)h(s), h(s)\right\rangle -$$
$$-2\left\langle P(s)h(s), \left(A(s) - R(s)G^*(s)N(s)G(s)\right)h(s)\right\rangle -$$
$$-2\left\langle P(s)h(s), R(s)G^*(s)N(s)y(s) + C(s)v(s)\right\rangle.$$

Групуємо подібні доданки. Отримуємо

$$\frac{dk(s)}{ds} = -\left\langle P^*(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)h(s), h(s)\right\rangle -$$
$$-\left\langle \left(G^*(s)N(s)G(s) - P(s)A(s) - A^*(s)P(s)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)\right)h(s), h(s)\right\rangle -$$
$$-\left\langle 2P^*(s)\left(A(s) - R(s)G^*(s)N(s)G(s)\right)h(s), h(s)\right\rangle +$$
$$+2\left\langle P^*(s)C(s)v(s), h(s)\right\rangle -$$
$$-2\left\langle P^*(s)R(s)G^*(s)N(s)y(s) + P^*(s)C(s)v(s), h(s)\right\rangle + \left\langle N(s)y(s), y(s)\right\rangle.$$

Враховуємо, що

$$\left\langle \left(P(s)A(s) + A^*(s)P(s)\right)h(s), h(s)\right\rangle =$$
$$= \left\langle P(s)A(s)h(s), h(s)\right\rangle + \left\langle A^*(s)P(s)h(s), h(s)\right\rangle =$$
$$= \left\langle P(s)A(s)h(s), h(s)\right\rangle + \left\langle h(s), P^*(s)A(s)h(s)\right\rangle = 2\left\langle P(s)A(s)h(s), h(s)\right\rangle.$$

Таким способом

$$\frac{dk(s)}{ds} = -\left\langle P^*(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)h(s), h(s)\right\rangle -$$
$$-\left\langle \left(G^*(s)N(s)G(s) - 2P(s)A(s)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)\right)h(s), h(s)\right\rangle -$$
$$-\left\langle 2P^*(s)\left(A(s) - R(s)G^*(s)N(s)G(s)\right)h(s), h(s)\right\rangle +$$
$$+2\left\langle P^*(s)C(s)v(s), h(s)\right\rangle -$$
$$-2\left\langle P^*(s)R(s)G^*(s)N(s)y(s) + P^*(s)C(s)v(s), h(s)\right\rangle + \left\langle N(s)y(s),y(s)\right\rangle.$$

В перших трьох доданках врахуємо, що

$$-P^*(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)-$$
$$-\left(G^*(s)N(s)G(s) - 2P(s)A(s) - P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)\right) -$$
$$-2P^*(s)\left(A(s) - R(s)G^*(s)N(s)G(s)\right) = -G^*(s)N(s)G(s) + 2P(s)A(s)-$$
$$-2P^*(s)A(s) + 2G^*(s)N(s)G(s) = G^*(s)N(s)G(s).$$

В четвертому і п'ятому доданках

$$
\begin{gathered}
2\left\langle P^*(s)C(s)v(s),h(s)\right\rangle -\\
-2\left\langle P^*(s)R(s)G^*(s)N(s)y(s)+P^*(s)C(s)v(s),h(s)\right\rangle =\\
=-2\left\langle G^*(s)N(s)y(s),h(s)\right\rangle .
\end{gathered}
$$

Отже,

$$
\begin{gathered}
\frac{dk(s)}{ds}=\left\langle G^*(s)N(s)G(s)h(s),h(s)\right\rangle -2\left\langle G^*(s)N(s)y(s),h(s)\right\rangle +\\
+\left\langle N(s)y(s),y(s)\right\rangle =\left\langle N(s)\left(y(s)-G(s)h(s)\right),y(s)-G(s)h(s)\right\rangle .
\end{gathered}
$$

Так, для $k(s)$ отримуємо диференціальне рівняння.

$$
\frac{dk(s)}{ds}=\left\langle N(s)\left(y(s)-G(s)h(s)\right),y(s)-G(s)h(s)\right\rangle .
$$

Оскільки

$$
\mathcal{B}(z,t_0)=\left\langle P(t_0)\left(z-h(t_0)\right),z-h(t_0)\right\rangle +k(t_0)=\left\langle P_0\left(z-x_0\right),z-x_0\right\rangle ,
$$

то $P(t_0)=P_0$, $R(t_0)=P_0^{-1}$, $h(t_0)=x_0$, $k(t_0)=0$.

Оптимальне керування згідно (3.26) має вигляд

$$
\begin{gathered}
u_*(s)=v(s)+\frac{1}{2}M^{-1}(s)C^*(s)grad_z\mathcal{B}(z,s)=\\
=v(s)+\frac{1}{2}M^{-1}(s)C^*(s)\left(2P(s)z+q(s)\right).
\end{gathered}
$$

Оскільки $q(s)=-2P(s)h(s)$, то

$$
u_*(s,z)=v(s)+M^{-1}(s)C^*(s)P(s)\left(z-h(s)\right). \tag{3.33}
$$

Таким способом, одержуємо функцію Белмана у вигляді

$$
\mathcal{B}(z,s)=\left\langle P(s)\left(z-h(s)\right),z-h(s)\right\rangle +k(s),
$$

де

$$
\begin{gathered}
\frac{dP(s)}{ds}+P(s)A(s)+A^*(s)P(s)+\\
+P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)=G^*(s)N(s)G(s),\ \ P(t_0)=P_0,
\end{gathered} \tag{3.34}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{dh(s)}{ds}=A(s)h(s)+\\
+R(s)G^*(s)N(s)\left(y(s)-G(s)h(s)\right)+C(s)v(s),\ \ h(t_0)=x_0,
\end{gathered} \tag{3.35}
$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dk(s)}{ds} = \langle N(s)\left(y(s) - G(s)h(s)\right), y(s) - G(s)h(s)\rangle, \\
&k(t_0) = 0,\ s \in [t_0, T].
\end{aligned} \tag{3.36}$$

При цьому матрицю $R(s) = P^{-1}(s)$ можна знайти з *матричного рівняння Ріккаті*

$$\begin{aligned}
&\frac{dR(s)}{ds} = A(s)R(s) + R(s)A^*(s) + \\
&+ C(s)M^{-1}(s)C^*(s) - R(s)G^*(s)N(s)G(s)R(s), \\
&R(t_0) = P_0^{-1},\ s \in [t_0, T].
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Оптимальна функція керування з (3.33) при $z = x(s)$ має вигляд

$$u_*(x(s), s) = M^{-1}(s)C^*(s)P(s)x(s) + v(s) + M^{-1}(s)C^*(s)P(s)h(s).$$

Оптимальне значення критерію якості (3.22)

$$\mathcal{I}_* = \mathcal{B}(x_T, T) = \langle P(T)\left(x_T - h(T)\right), x_T - h(T)\rangle + k(T).$$

3.4 Зв'язок між функцією Белмана і множиною досяжності

Розглянемо систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \tag{3.38}$$

за обмежень

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau + \Phi(x(t_0)) \le r^2, \\
&x(t) \in X(t),\ u(t) \in \mathcal{U}(t),\ t \in [t_0, T],
\end{aligned} \tag{3.39}$$

за аналогічних умов до тих, що накладались на відповідні функції задачі (3.1)-(3.3) (стор. 39). Крім того, вважаємо, що функції $f_0(x, u, t)$, $\Phi(x)$ є невід'ємними, $r > 0$.

Означення 3.1. *Множиною досяжності системи* (3.38) *за обмежень* (3.39) *називають сукупність точок $z \in \mathbb{R}^n$, для яких існує точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, допустиме керування $u(\cdot)$ і відповідний розв'язок $x(\cdot) = x(\cdot, u, x_0, t_0)$ системи* (3.38) *такі, що виконуються обмеження* (3.39) *і точка*

$$z = x(t, u, x_0, t_0).$$

Множину досяжності позначимо $\mathcal{X}(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Припустимо, що має розв'язок задача оптимального керування

$$\mathcal{I}(u, x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(t_0)) \to \inf \tag{3.40}$$

за обмежень

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \tag{3.41}$$

$$x(t) \in X(t),\ u(t) \in \mathcal{U}(t),\ t \in [t_0, T]. \tag{3.42}$$

Має місце таке твердження.

Теорема 3.2 (про множину досяжності)**.** *Множина досяжності*

$$\mathcal{X}(s) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \mathcal{B}(z, s) \le r^2 \right\},$$

де $\mathcal{B}(z, s)$ *– функція Белмана задачі* (3.40)-(3.42).

Доведення. Необхідність. Нехай $z \in \mathcal{X}(s)$, де $s \in [t_0, T]$. Тоді існує допустиме керування і траєкторія системи (3.38), для яких має місце (3.39) для $t \in [t_0, s]$. Отже, $\mathcal{I}_s(u, x) \le r^2$ при $x(s) = z$, де

$$\mathcal{I}_s(u, x) = \int_{t_0}^{s} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(t_0)).$$

Тому

$$\mathcal{B}(z, s) = \inf_{(u,x)} \mathcal{I}_s(u, x) \le r^2,$$

де точна нижня грань береться за допустимими керуваннями і траєкторіями системи (3.38).

Достатність. Нехай $\mathcal{B}(z, s) \le r^2$. Оскільки існує розв'язок (u_*, x_*) задачі (3.40)-(3.42), то за умов (3.42) і при $x_*(s) = z$ маємо

$$\mathcal{B}(z, s) = \inf_{(u,x)} \mathcal{I}_s(u, x) = \int_{t_0}^{s} f_0(x_*(t), u_*(t), t)dt + \Phi(x_*(t_0)) \le r^2.$$

За означенням множини досяжності системи (3.38) за обмежень (3.39) маємо $z \in \mathcal{X}(s)$. □

Розглянемо лінійну систему вигляду (3.13)

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t),$$

з обмеженням

$$\int_{t_0}^{t} \{\langle N(s)x(s), x(s)\rangle + \langle M(s)u(s), u(s)\rangle\} \, ds + \langle P_0 x(t_0), x(t_0)\rangle \le r^2,$$

де $A(t)$, $C(t)$, $M(t)$, $N(t)$, P_0 – матриці, що задовільняють умови, аналогічні до умов задачі (3.13)-(3.15) (стор. 42), $t \in [t_0, T]$. За теоремою 3.2 множина досяжності системи має форму еліпсоїда

$$\mathcal{X}(t) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle P(t)z, z\rangle \le r^2 \right\},$$

де матриця $P(t)$ задовольняє матричне рівняння Ріккаті (3.18), (3.19).

Нехай обмеження мають вигляд

$$\int_{t_0}^{t} \{\langle N(s)\left(G(s)x(s) - y(s)\right), G(s)x(s) - y(s)\rangle +$$
$$+ \langle M(s)\left(u(s) - v(s)\right), u(s) - v(s)\rangle\} \, ds +$$
$$+ \langle P_0\left(x(t_0) - x_0\right), x(t_0) - x_0\rangle \le r^2,$$

де матриці $A(t)$, $C(t)$, $M(t)$, $N(t)$, $G(t)$, P_0, функції $y(t)$, $v(t)$, точка x_0 задовільняють умови, аналогічні до умов задачі (3.20)-(3.22) (стор. 43), $t \in [t_0, T]$. Тоді множина досяжності має вигляд

$$\mathcal{X}(t) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle P(t)\left(z - h(t)\right), z - h(t)\rangle \le r^2 - k(t) \right\}, t \in [t_0, T].$$

Тут $P(t)$, $h(t)$, $k(t)$ задовольняють (3.34)-(3.37).

Приклад 3.1. Побудуємо множину досяжності скалярної системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2}x(t) + u(t), \; t \in [0, 5]$$

за обмежень

$$\int_{0}^{t} \left(0.04(x(s) - 1)^2 + 0.25(u(s) - 1)^2\right) ds + x^2(0) \le 4.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$ – функція керування. Множина досяжності має вигляд

$$\mathcal{X}(t) = \left[h(t) - \sqrt{R(t)(4 - k(t)}, h(t) + \sqrt{R(t)(4 - k(t)}\right],$$

де

$$\frac{dR(t)}{dt} = R(t) - 0.04R^2(t) + 4, \; R(0) = 1,$$
$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{2}h(t) + 0.04R(t)\left(1 - h(t)\right) + 1, \; h(0) = 0,$$
$$\frac{dk(t)}{dt} = 0.04\left(1 - h(t)\right)^2, \; k(0) = 0, \; t \in [0, 5].$$

Література: [31]

Лекція 4

Послідовний аналіз варіантів

4.1 Апоркисмація задачі оптимального керування

Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає у мінімізації функціоналу

$$\mathcal{I}(u,x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt \tag{4.1}$$

при умовах

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u(t),t), \tag{4.2}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{4.3}$$

Тут $f_0(x,u,t)$ є неперервна функція, $f(x,u,t)$ – n-вимірна вектор-функція, неперервна за x,u,t, x – n-вимірний вектор фазових координат з фазового простору $X \subset \mathbb{R}^n$, u – r-вимірний вектор фазових координат з простору керувань $U \subset \mathbb{R}^r$. Припустимо, що задані також обмеження

$$x(t) \in \Omega_t(X),\ \ u(t) \in \Omega_t(U), \tag{4.4}$$

де $\Omega_t(X) \subseteq X$, $\Omega_t(U) \subseteq U$, $t \in [t_0,T]$. В просторі (x,t) проведемо гіперплощини $t = t_0+i\tau$, $i = 1,2,...,N$, $\tau > 0$ – крок інтегрування, $T = t_0+N\tau$. Припустимо також, що на проміжку $(t_0+i\tau, t_0+(i+1)\tau)$ керування має постійні значення u_i. Тоді функціонал (4.1) можна замінити інтегральною сумою

$$\mathcal{I}(x_i,u_i) = \tau \sum_{i=0}^{N-1} F_i(x_i,u_i), \tag{4.5}$$

а співвідношення (4.2), (4.3) – різницевою схемою

$$x_{i+1} = x_i + \tau f_i(x_i, u_i). \tag{4.6}$$

При цьому

$$x_i \in \Omega_i(X), u_i \in \Omega_i(U),\ \ i = 1, 2, ..., N, \tag{4.7}$$

де $\Omega_i(X) = \Omega_{t_0+i\tau}(X)$, $\Omega_i(U) = \Omega_{t_0+i\tau}(U)$, $f_i(x_i, u_i) = f(x_i, u_i, t_0 + i\tau)$, $F_i(x_i, u_i) = f_0(x_i, u_i, t_0 + i\tau)$. Таким способом, отримали задачу нелінійного програмування. Якщо врахувати, що

$$x_1 = x_0 + \tau f_0(x_0, u_0) = \Phi_1(u_0),$$

$$x_2 = \Phi_1(u_0) + \tau f_1(x_1, u_1) = \Phi_2(u_0, u_1),$$

$$\vdots$$

$$x_k = \Phi_k(u_0, ..., u_{k-1}),$$

то функціонал (4.5) можна переписати у вигляді

$$\mathcal{J} = \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{J}_i(u_0, u_1, ..., u_i), \tag{4.8}$$

де $\mathcal{J}_i(u_0, u_1, ..., u_i) = \tau F_i(\Phi_i(u_0, ..., u_{i-1}), u_i)$.

Так, задача (4.1)-(4.4) зведена до задачі мінімізації функції (4.8) від скінченної кількості змінних. Слід зауважити, що функція (4.8) має важливу особливість: функція $\mathcal{J}$ є сумою скінченої кількості функцій $\mathcal{J}_i$, при цьому $\mathcal{J}_i$ залежить тільки від $(u_0, ..., u_i)$, тобто від перших $(i + 1)$ невідомих.

Розглянемо фазову траєкторію γ системи (4.2) при деякому керуванні. Позначимо через x_i точки, в яких γ перетинає площину $t = t_0 + i\tau$. Введемо оператор $B(x_i, x_{i+1})$, який парі точок (x_i, x_{i+1}) ставить у відповідність керування u_i, що переводить систему (4.2) зі стану $x(t_0+i\tau) = x_i$ в точку $x(t_0+(i+1)\tau) = x_{i+1}$, а також траєкторію $\gamma_{i,i+1}$, що з‘єднує точки x_i і x_{i+1}. Таким способом

$$(u_i, \gamma_{i,i+1}) = B(x_i, x_{i+1}).$$

Оператор $B(x_i, x_{i+1})$ називають *елементарною операцією*. Тоді функціонал (4.1) має вигляд

$$\mathcal{J}(x, u) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_0(\gamma_{i,i+1}, u_i, t)dt = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i(x_i, x_{i+1}) \tag{4.9}$$

де $\varphi_i(x_i, x_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_0(\gamma_{i,i+1}(t), u_i, t)dt$ – функція, що визначена за допомогою елементарних операцій. Так, за допомогою елементарної операції будується апроксимація фазової траєкторії γ деякою ламаною, що складається з дуг $\gamma_{i,i+1}$.

Редукція задачі (4.1) – (4.4) до задачі (4.5) - (4.7) досить тривіальна, тоді як редукція за допомогою елементарної операції досить складна. До розв'язання таких задач можуть застосовуватись методи типу градієнтного спуску.

Означення 4.1. *Адитивною функцією векторів $x_0, x_1, ..., x_N$ будемо називати функцію, що має вигляд*

$$f(x_0, x_1, ..., x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}). \tag{4.10}$$

Задача нелінійного програмування називається адитивною, якщо вона полягає у знаходженні екстремуму адитивної функції при обмеженнях вигляду $x_i \in G_i \subset \mathbb{R}^n$.

Адитивні задачі мають простий геометричний зміст. Побудуємо в просторі (x, t) гіперплощини $t_i = t_0 + i\tau, i = 0, 1, ..., N$, які позначимо Σ_i. Задамо послідовність векторів $\overline{x}_0, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_N$, за довжину відрізку, що з'єднує точки $\overline{x}_i$ та $\overline{x}_{i+1}$ вважаємо значення $f_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$. Тоді функція $f(\bar{x}_0, ..., \bar{x}_N)$, що обчислена за допомогою (4.10) визначає довжину ламаної, що проходить через точки $\bar{x}_0, \bar{x}_1, ..., \bar{x}_N$.

Адитивна задача нелінійного програмування може бути сформульована так: серед всіх допустимих ламаних, що з'єднують площини Σ_0 і Σ_N, знайти ту, довжина якої є найменшою. З (4.9) випливає зв'язок між адитивною задачею математичного програмування та задачею оптимального керування.

4.2 Київський віник

Алгоритм *"київський віник"* застосовується до розв'язування адитивних задач математичного програмування і є багатокроковим процесом, на кожному кроці якого відбувається *"відмітання"* множини варіантів, про яку в процесі роботи алгоритму стає відомо, що вона не містить оптимального варіанту.

Нехай $x_1 \in \Sigma_1$. Позначимо $\ell(x_1) = \min\limits_{x_0 \in G_0} f_1(x_0, x_1)$ – відстань від точки x_1 до Σ_0.

Оскільки

$$\min_{x_0 \in G_0} f(x_0, x_1, ..., x_N) = \ell(x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}),$$

то ламані, що не містять відрізок (a_0, x_1), не можуть претендувати на розв'язок і їх потрібно *"відмести"*. Множину *"відметених"* ламаних на нульовому кроці позначимо S_0. Розглянемо точку $x_2 \in \Sigma_2$. Позначимо тепер через $\ell(x_2)$ довжину найбільш короткої ламаної, що з'єднує x_2 з Σ_0

$$\ell(x_2) = \min_{x_1 \in G_1} (\ell(x_1) + f_1(x_1, x_2)).$$

Множина варіантів S_1, яку ми відмітаємо на цьому кроці, складається з усіх ламаних, які не містять ламаної довжини $\ell(x_2)$.

Нехай тепер кожну точку $x_i \in \Sigma_i$ ми з'єднали з Σ_0 ламаною найменшої довжини $\ell(x_i)$. Тоді довжина найкоротшої ламаної, що з'єднує точку x_{i+1} з Σ_0 визначається за формулою

$$\ell(x_{i+1}) = \min_{x \in G_i} (\ell(x_i) + f_i(x_i, x_{i+1})). \tag{4.11}$$

Всі варіанти S_i, що не містять ламаної довжини $\ell(x_{i+1})$ відмітаються. На останньому кроці згідно (4.11) ми знаходимо $\ell(x_N)$ і потім розв'язуємо задачу мінімізації

$$\ell = \min_{x_N \in G_N} \ell(x_N)$$

На цьому процедура розв'язування задачі завершується.

"Київський віник" дозволяє розв'язати задачу на глобальний екстремум. Знайдена оптимальна траєкторія має важливу властивість – будьякий її відрізок є знову оптимальною траєкторією. Це означає, що частина траєкторії, що з'єднує довільні дві точки x_i та x_k є ламаною, що серед всіх допустимих ламаних, що з'єднують точки x_i та x_k, має найменшу довжину. В цьому виявляється його спорідненість з методом динамічного програмування.

Для реалізації алгоритму необхідно сформувати в просторі (x, t) сітку: $\{t_i = t_0 + i\tau\}$, і на Σ_i побудувати сітку за змінною x. Вузол сітки позначимо $p_k(i)$, де i відповідає номеру гіперплощини Σ_i, k – номеру вузла на Σ_i за змінною x.

Так, ми з'єднуємо кожні два вузли, що лежать в сумісних гіперплощинах, і обчислюємо довжину згідно (4.12). Множина ламаних, що з'єднують вузли на гіперплощині Σ_0 з вузлами на гіперплощині Σ_N і проходять через вузли на гіперплощинах $\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_{N-1}$, є дискретною.

Позначимо $\Delta_i \in \Sigma_i$ сукупність вузлів $p_k(i)$, що лежать в області G_i. Множина Δ_i називається *шкалою*.

Алгоритм 4.1. *Крок 1. Для всіх* $x_1 \in \Delta_1$ *розв'язуємо задачу*

$$\ell(x_1) = \min_{x_0 \in \Delta_0} f_1(x_0, x_1) = f_1(x_0^*(x_1), x_1).$$

Запам'ятовуємо ламану $(x_0^*(x_1), x_1)$ *для кожної точки* x_1 *та значення* $\ell(x_1)$.

Крок 2. Для всіх $x_2 \in \Delta_2$ *розв'язуємо задачу*

$$\ell(x_2) = \min_{x_1 \in \Delta_1} \{\ell(x_1) + f_1(x_1, x_2)\} = \ell(x_1^*(x_2)) + f_1(x_1^*(x_2), x_2).$$

Запам'ятовуємо ламану $(x_0^*(x_1^*(x_2)), x_1^*(x_2), x_2)$ *і значення* $\ell(x_2)$ *і т.д., поки не приходимо до множини* Δ_N.

Крок 3. Розв'язуємо задачу

$$\ell(x_N) = \min_{x_{N-1} \in \Delta_{N-1}} \{\ell(x_{N-1}) + f_{N-1}(x_{N-1}, x_N)\} = \ell(x_{N-1}^*) + f_{N-1}(x_{N-1}^*, x_N),$$

$x_N \in \Delta_N$. *Запам'ятовуємо відповідну ламану, що з'єднує* x_N *з* $x_{N-1}^*(x_N)$ *та* $x_{N-2}^*(x_{N-1})$ *і т. д. Остання точка ламаної лежить в* Δ_0. *Крім того, фіксуємо* $\ell(x_N)$, $x_N \in \Delta_N$.

Крок 4. Знаходимо x_N^* *як розв'язок задачі*

$$\ell = \ell(x_N^*) = \min_{x_N \in \Delta_N} \ell(x_N).$$

Відтворюємо оптимальну ламану

$$x_{N-1}^* = x_{N-1}(x_N^*), x_{N-2}^* = x_{N-2}(x_{N-1}^*), ..., x_0^* = x_0(x_1^*).$$

Результат: оптимальне значення ℓ *функціоналу та послідовність* x_i, *що визначає оптимальну ламану.*

Реалізація алгоритму *"київський віник"* потребує значних затрат оперативної пам'яті та часу обчислень.

4.3 Схема Мойсеєва

Розглянемо задачу оптимального керування (4.1) - (4.4). Розіб'ємо відрізок $[t_0, T]$ сіткою $t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = T$. На множині $\Omega_i = \Omega_{t_i}(X)$ візьмемо деяку дискретну сітку точок $x_{ij} \in \Omega_i$ і цю сітку будемо називати *шкалою* H_i. Шкали H_i та H_{i+1} називаються *сусідніми.* Розглянемо для деяких $x \in H_i$, $y \in H_{i+1}$ допоміжну задачу

$$\mathcal{J}_i(x, y, u) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_0(x(t), u(t), t) dt \to \min \tag{4.12}$$

при умові, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t),\ t \in [t_i, t_{i+1}], x(t_i) = x, x(t_{i+1}) = y, \tag{4.13}$$

$$x(t) \in \Omega_t(X), u(t) = \Omega_t(U), t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{4.14}$$

Задача (4.1)-(4.4) є *елементарною операцією.* Позначимо через $\Delta_i(x, y)$ множину керувань, що задовольняють умовам (4.13), (4.14), $M_i(x, y) = \min\limits_{u \in \Delta_i(x,y)} \mathcal{J}(x, y, u)$. Так, отримуємо функціонал

$$f(x_0, x_1, ..., x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} M_i(x_i, x_{i+1}) + \Phi(x_N) \to \min, \tag{4.15}$$

де $x_i \in H_i$, $x_{i+1} \in H_{i+1}$, $x_N \in H_N$, $i = 0, 1, ..., N-1$. Для розв'язування задачі (4.15) застосовується метод *"київський віник"*.

Література: [9, 10, 18, 19]

Лекція 5

Оптимальне керування матричним диференціальним рівнянням

5.1 Диференціювання функцій матричного аргументу

Введемо такі позначення: $\mathbb{R}^{m\times n}$ – множина матриць розмірності $m\times n$, $trA=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ – слід матриці $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $\|A\|=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ – норма матриці A, $I\in\mathbb{R}^{n\times n}$ – одинична матриця, $*$ – знак транспонування.

Функцію вигляду $f:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}^{1}$ ми будемо називати *функцією матричною аргументу*. Такими функціями є $f(A)=trA$, $f(A)=\det A$, $f(A)=\lambda_{\max}(A)$, $f(A)=\|A\|$, $f(A)=tr\exp(A)$, де $\lambda_{\max}(A)$ – максимальне власне число матриці A, $tr\exp(A)$ – слід експоненти, $\det A$ – визначник матриці $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Множина $\mathbb{R}^{m\times n}$ утворює лінійний нормований простір, тому можна ввести поняття похідної від функції матричного аргументу.

Означення 5.1. *Похідною* $\frac{df(A)}{dA}$ *функції* $f:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}^{1}$ *в точці* $A=(a_{ij})_{m\times n}$ *називається матриця* $\left(\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\right)_{m\times n}$.

Можна показати що це означення еквівалентне означенню похідної, як лінійного приросту у евклідовому просторі $\mathbb{R}^{m\times n}$, де скалярний добуток $\langle A,B\rangle=tr(A^{*}B)$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Тобто,

$$f(A+H)=f(A)+tr\left(\left(\frac{df(A)}{dA}\right)^{*}H\right)+o(\|H\|),$$

де $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\|H\| \to 0$, $\frac{df(A)}{dA} = \left(\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\right)_{m\times n}$.

Приклад 5.1. Нехай $f(A) = \det A$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Використаємо співвідношення $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$, де A_{ik} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ik}. Тоді за означенням 5.1 отримуємо

$$\frac{df(A)}{dA} = (A_{ij})_{n\times n}.$$

Якщо матриця A – неособлива, то

$$\frac{df(A)}{dA} = (A^*)^{-1}\det A.$$

Нижче ми виведемо основні співвідношення для диференціювання функцій, які пов'язані зі слідом матриці. Тому наведемо основні властивості функції сліду. Нехай $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

- $\|A\|^2 = tr\,(A^*A)$;
- $tr\,(A^*B) = tr\,(BA^*)$;
- $tr\,(A^*B) = tr\,(AB^*)$;
- $\langle a, b\rangle = a^*b = tr\,(ab^*)$, де $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Ці властивості доводяться виходячи з означення сліду матриці.

Мають місце такі твердження.

Теорема 5.1. *Якщо* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *то*

$$\frac{d}{dB}tr\,(A^*B) = A.$$

Доведення. Нехай $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$. Введемо такі позначення: $a_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})^*$, $b_i = (b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{mi})^*$, $i = 1, 2, ..., n$ – вектори, які є стовпчиками матриць A, B відповідно. Тоді виконується співвідношення

$$tr\,(A^*B) = \sum_{i=1}^{n} a_i^*b_i.$$

Звідси для фіксованих індексів $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$ отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial b_{ij}}tr\,(A^*B) = a_{ij}.$$

□

Наслідок 1. Нехай $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Тоді

$$\frac{d}{dB} tr\,(ABC) = A^* C^*.$$

Наслідок 2. Якщо $a \in \mathbb{R}^n$, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то $\frac{d}{dD}\langle Da, a\rangle = \frac{d}{dD} a^* Da = aa^*$.

Справедливість наслідків випливає з $tr\,(ABC) = tr\,(CAB)$, $tr\,(a^*Da) = a^*Da$.

Теорема 5.2. *Якщо $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{p\times q}$, $G : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{q\times p}$ – неперервно диференційовані функції матричного аргументу, то*

$$\frac{d}{dA} tr\,(F(A)G(A)) = \frac{d}{dA} tr\,(F(A)X) + \frac{d}{dA} tr\,(YG(A))\,,$$

де $X = G(A)$, $Y = F(A)$. Тут під $\frac{d}{dA} tr\,(F(A)X)$, $\frac{d}{dA} tr\,(YG(A))$ розуміємо похідні за аргументом A за умови, що матриці X, Y – фіксовані.

Доведення. Нехай $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $F^*(A) = (f_1(A), f_2(A) \dots f_p(A))$, $G(A) = (g_1(A), g_2(A) \dots g_p(A))$, $f_i(A)$, $g_i(A)$ – вектор-функції розмірності q, $i = 1, 2, ..., p$. Тоді

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} tr\,(F(A)G(A)) = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum_{s=1}^{p} f_s^*(A) g_s(A) =$$

$$= \sum_{s=1}^{p} \left(\frac{\partial f_s^*(A)}{\partial a_{ij}} g_s(A) + f_s^*(A) \frac{\partial g_s(A)}{\partial a_{ij}} \right),$$

$i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$. Позначимо $x_s = g_s(A)$, $y_s = f_s(A)$, $s = 1, 2, ..., p$. З останніх співвідношень випливає

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} tr\,(F(A)G(A)) = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum_{s=1}^{p} f_s^*(A) x_s + \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum_{s=1}^{p} y_s^* g_s(A) =$$

$$= \frac{d}{dA} tr\,(F(A)X) + \frac{d}{dA} tr\,(YG(A))\,,$$

де $X = (x_1 x_2 \dots x_p)$, $Y^* = (y_1 y_2 \dots y_p)$. $\square$

Наслідок 1. Якщо $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$, то

$$\frac{d}{dU} tr\,(U^* A U) = (A + A^*)\,U.$$

Доведення. Позначимо $X = U^*A$, $Y = U$. Тоді за теоремою 5.2

$$\frac{d}{dU} tr\left(U^*AU\right) = \frac{d}{dU} tr(XU) + \frac{d}{dU} tr(U^*AY).$$

За теоремою 5.1

$$\frac{d}{dU} tr\left(XU\right) = X^* = A^*U.$$

Оскільки

$$tr\left(U^*AY\right) = tr\left(AYU^*\right) = tr\left((AY)^*U\right),$$

то $\frac{d}{dU} tr\left(U^*AY\right) = AY = AU$. □

Наслідок 2. Якщо $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$, то

$$\frac{d}{dU} tr\left(UBU^*\right) = U\left(B^* + B\right).$$

Наслідок 3. Якщо в умовах наслідку 1 теореми 5.2 матриця $A^* = A$, то

$$\frac{d}{dU} tr\left(U^*AU\right) = 2AU.$$

Теорема 5.3. *Нехай $g(X(s), s)$ – неперервно диференційована скалярна функція, $X(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $s \in \mathbb{R}^1$. Тоді*

$$\frac{dg}{ds} = \frac{\partial g}{\partial s} + tr\left[\left(\frac{\partial g}{\partial X}\right)^* \frac{dX}{ds}\right].$$

Теорема 5.4. *Нехай $A(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B(s) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – матриці з неперервно диференційованими компонентами. Тоді*

$$\frac{d}{ds} tr\left(A(s)B(s)\right) = tr\left(\frac{dA(s)}{ds} B(s)\right) + tr\left(A(s)\frac{dB(s)}{ds}\right).$$

Справедливість теорем 5.3 та 5.4 випливає з властивостей неперервно диференційованих функцій та функції сліду.

Розглянемо приклади знаходження похідних від функцій матричного аргументу.

Приклад 5.2. Нехай $f(A) = \|A\|^2 = tr\left(A^*A\right)$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. З наслідку 3 теореми 5.2 випливає, що $\frac{df}{dA} = 2A$.

Приклад 5.3. $f(A) = tr(BA^2)$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. За теоремою 5.2

$$\frac{df}{dA} = \frac{d}{dA} tr(XA) + \frac{d}{dA} tr(BAY),$$

де $X = BA$, $Y = A$. Тоді
$$\frac{df}{dA} = X^* + (YB)^* = A^*B^* + B^*A^*.$$

Якщо $B = I$, то $\frac{df}{dA} = 2A^*$.

Приклад 5.4. Для $f(A) = tr(BA^p)$, $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ має місце формула
$$\frac{df}{dA} = B^*\left(A^*\right)^{p-1} + A^*B^*\left(A^*\right)^{p-2} + \ldots + \left(A^*\right)^{p-1}B^*.$$

5.2 Принцип оптимальності Белмана

Нехай $Y \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ – множина обмежень на розв'язки матричного диференціального рівняння
$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t), U(t), t) \tag{5.1}$$
і задана початкова умова
$$X(t_0) = X_0. \tag{5.2}$$
Тут $X(t) \in Y$ – матриця розв'язків рівняння (5.1), $U(t) \in V$ – матриця керування, $V \subseteq \mathbb{R}^{p\times q}$– множина обмежень на матрицю керування, $F(X, U, t)$ – матрична функція розмірності $m \times n$, яка задовольняє умовам існування, єдиності і продовжуваності розв'язку задачі Коші, $X_0 \in Y$ – відома матриця.

Задача оптимального керування матричним рівнянням (5.1) полягає в тому, щоб знайти матрицю керування $U_* = U_*(t) \in V$ і відповідний розв'язок задачі (5.1), (5.2) $X_* = X_*(t) \in Y$ такі, що мінімізують функціонал
$$\mathcal{I}(U) = \int_{t_0}^{T} f_0(X(t), U(t), t)dt + \Phi(X(T)), \tag{5.3}$$
де $f_0(X, U, t)$ – інтегрована на $[t_0, T]$ функція, $\Phi(X)$ – неперервна функція. Розв'язком задачі (5.1)-(5.3) назвемо пару (U_*, X_*). Припустимо, що така пара існує.

Розглянемо *допоміжну задачу*. Нехай $s \in (t_0, T)$ – фіксований момент часу. Необхідно мінімізувати функціонал
$$\mathcal{I}_s(U) = \int_{s}^{T} f_0(X(t), U(t), t)dt + \Phi(X(T)) \tag{5.4}$$
при умовах
$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t), U(t), t), \tag{5.5}$$

$$X(s) = X_*(s). \tag{5.6}$$

Тут $X(t) \in Y$, $U(t) \in V$, $t \in [s, T]$.

Теорема 5.5 (принцип оптимальност)**.** *Якщо* $\left(\tilde{U}, \tilde{X}\right)$ *– розв'язок допоміжної задачі* (5.4)-(5.6)*, то він співпадає з розв'язком задачі* (5.1)-(5.2) *на інтервалі* $t \in [s, T]$.

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що $\left(\tilde{U}, \tilde{X}\right) \neq (U_*(t), X_*(t))$. Тоді $\mathcal{I}_s(U_*) > \mathcal{I}_s(\tilde{U})$. Побудуємо керування

$$\hat{U}(t) = \begin{cases} U_*(t), & \text{якщо } t \in [t_0, s], \\ \tilde{U}(t), & \text{якщо } t \in [s, T]. \end{cases}$$

Тоді відповідна йому траєкторія має вигляд

$$\hat{X}(t) = \begin{cases} X_*(t), & \text{якщо } t \in [t_0, s], \\ \tilde{X}(t), & \text{якщо } t \in [s, T]. \end{cases}$$

Таким способом,

$$\mathcal{I}(\hat{U}) = \int_{t_0}^{T} f_0(\hat{X}(t), \hat{U}(t), t)dt + \Phi(\hat{X}(T)) = \int_{t_0}^{s} f_0(X_*(t), U_*(t), t)dt +$$
$$+ \int_{s}^{T} f_0(\tilde{X}(t), \tilde{U}(t), t)dt + \Phi(\tilde{X}(T)) <$$
$$< \int_{t_0}^{s} f_0(X_*(t), U_*(t), t)dt + \mathcal{I}_s(U_*) = \mathcal{I}(U_*).$$

Прийшли до протиріччя. □

5.3 Рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана

Нехай $Z \in Y$– деяка матриця.

Означення 5.2. *Функція вигляду*

$$\mathcal{B}(Z, s) = \min_{U \in V} \left\{ \int_{s}^{T} f_0(X(t), U(t), t)dt + \Phi(X(T)) \right\},$$

що визначена на розв'язках рівняння

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t), U(t), t)$$

при умовах $X(s) = Z$, $t \in [s, T]$ *називається функцією Белмана задачі* (5.1)-(5.3).

Якщо функція $\mathcal{B}(X,s)$ є неперервно диференційованою за X та s, то має місце *рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана*

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial s} + \min_{U \in V} \left[tr \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial X} \right)^* F(X,U,s) \right\} + f_0(X,U,s) \right] = 0, \tag{5.7}$$

$$\mathcal{B}(X,T) = \Phi(X). \tag{5.8}$$

Справді, при виведенні рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана, як і у випадку співвідношення (2.14), приходимо до рівності

$$\min_{U \in V} \left\{ \frac{d\mathcal{B}(X,s)}{ds} + f_0(X,U,s) \right\} = 0. \tag{5.9}$$

Оскільки похідна $\frac{dB(X,s)}{ds}$ розглядається на розв'язках рівняння (5.1), то за теоремою 5.3

$$\frac{d\mathcal{B}(X,s)}{ds} = \frac{\partial \mathcal{B}(X,s)}{\partial s} + tr \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial X} \right)^* F(X,U,s) \right\}.$$

Звідси випливає справедливість (5.7). Співвідношення (5.8) є наслідком означення 5.2.

Рівняння (5.7) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial s} + \min_{U \in V} \mathcal{H}(\mathcal{B}, X, U, s) = 0,$$

де $\mathcal{H}(\mathcal{B}, X, U, s) = tr \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial X} \right)^* F(X,U,s) \right\} + f_0(X,U,s)$.

5.4 Оптимальне керування лінійним матричним рівнянням

Застосуємо рівняння (5.7), (5.8) до розв'язування задачі оптимального керування лінійним матричним диференціальним рівнянням з квадратичним критерієм якості. Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + G(t)U(t), \tag{5.10}$$

де $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матриця розв'язків рівняння (5.10), $U(t) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ – матриця керування, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G(t) \in \mathbb{R}^{n \times k}$– відомі матриці з неперервними компонентами, $t \in [t_0, T]$, $X(t_0) = X_0$, $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – відома матриця. Необхідно знайти матрицю $U_*(t) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, яка мінімізує функціонал

$$\mathcal{I}(U) = \int_{t_0}^{T} tr \left\{ X^*(t)Q_1(t)X(t) + U^*(t)Q_2(t)U(t) \right\} dt + tr(X^*(T)Q_0X(T)). \tag{5.11}$$

Тут Q_0, $Q_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – невід'ємновизначені симетричні матриці, $Q_2(t) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ – додатновизначена симетрична матриця, $t \in [t_0, T]$. Оптимальну матрицю $U_*(t)$ визначимо з умови

$$\frac{\partial}{\partial U}\mathcal{H}(B, X, U, s) = 0, \tag{5.12}$$

де $X = X(s)$,

$$\mathcal{H}(\mathcal{B}, X, U, s) = tr\left[\frac{\partial \mathcal{B}^*(X, s)}{\partial X}\left(A(s)X + G(s)U\right)\right] +$$

$$+tr(X^*Q_1(s)X + U^*Q_2(s)U).$$

З теореми 5.1 та наслідку 1 теореми 5.2 випливає

$$\frac{\partial}{\partial U}tr\left[\frac{\partial \mathcal{B}^*(X, s)}{\partial X}\left(A(s)X + G(s)U\right)\right] = G^*(s)\frac{\partial \mathcal{B}(X, s)}{\partial X},$$

$$\frac{\partial}{\partial U}tr\left\{X^*Q_1(s)X + U^*Q_2(s)U\right\} = 2Q_2(s)U.$$

З (5.12) отримуємо

$$U_*(s) = -\frac{1}{2}Q_2^{-1}(s)G^*(s)\frac{\partial \mathcal{B}(X, s)}{\partial X}.$$

Виберемо функцію Беллмана у вигляді

$$\mathcal{B}(X, s) = tr(X^*P(s)X),$$

де $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – невідома абсолютно неперервна матриця, яку потрібно визначити. Матрицю $P(s)$ шукаємо з рівняння

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial s} + \mathcal{H}(\mathcal{B}, X, U_*, s) = 0,\ \mathcal{B}(X, T) = tr(X^*Q_0X)$$

Так як $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial s} = tr(X^*\frac{dP(s)}{ds}X)$, $\frac{\partial \mathcal{B}(X,s)}{\partial X} = \left(P^*(s) + P(s)\right)X$, то

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial s} + \mathcal{H}(\mathcal{B}, X, U_*, s) = tr(X^*\frac{dP(s)}{ds}X)+$$

$$+tr\left[X^*\left(P(s) + P^*(s)\right)\left(A(s)X - \frac{1}{2}G(s)Q_2^{-1}G^*(s)\left(P(s) + P^*(s)\right)X\right)\right] +$$

$$+tr(X^*Q_1(s)X)+$$

$$+\frac{1}{4}tr\left\{X^*\left(P^*(s)+P(s)\right)G(s)Q_2^{-1}(s)G^T(s)\left(P^*(s)+P(s)\right)X\right\}=0.$$

Звідси

$$\begin{aligned}tr&\left\{X^*\left[\frac{dP(s)}{ds}+\left(P(s)+P^*(s)\right)A(s)-\right.\right.\\&-\frac{1}{2}\left(P(s)+P^*(s)\right)G(s)Q_2^{-1}G^*(s)\left(P(s)+P^*(s)\right)+Q_1(s)+\\&\left.\left.+\frac{1}{4}\left(P(s)+P^*(s)\right)G(s)Q_2^{-1}G^*(s)\left(P(s)+P^*(s)\right)\right]X\right\}=0.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Використовуючи властивості сліду, матимемо

$$\begin{gathered}trX^*P^*(s)A(s)X=trXX^*P^*(s)A(s)=trA(s)XX^*P^*(s)=\\=tr\left(A(s)XX^*\right)^*P(s)=\\=trXX^*A^{T*}(s)P(s)=trX^*A^*(s)P(s)X.\end{gathered}$$

З співвідношення (5.13), зводячи подібні доданки, отримуємо

$$\begin{gathered}trX^*\left[\frac{dP(s)}{ds}+P(s)A(s)+A^*(s)P(s)+Q_1(s)-\right.\\\left.-\frac{1}{4}\left(P(s)+P^*(s)\right)G(s)Q_2^{-1}G^*(s)\left(P(s)+P^*(s)\right)\right]X=0.\end{gathered}$$

Виберемо матрицю $P(s)$ з умови

$$\begin{aligned}&\frac{dP(s)}{ds}+P(s)A(s)+A^*(s)P(s)+Q_1(s)-\\&-\frac{1}{4}\left(P(s)+P^*(s)\right)G(s)Q_2^{-1}G^*(s)\left(P(s)+P^*(s)\right)=0.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Оскільки $\mathcal{B}(X,T)=tr(X^*Q_0X)$, то

$$P(T)=Q_0.\tag{5.15}$$

Матриця $P(s)$, що задовольняє співвідношення (5.14), (5.15) є симетричною. Тому

$$\frac{dP(s)}{ds}+P(s)A(s)+A^*(s)P(s)+Q_1(s)-P(s)G(s)Q_2^{-1}G^*(s)P(s)=0.\tag{5.16}$$

При цьому має місце умова Коші (5.15). Співвідношення (5.16) є диференціальним рівнянням Ріккаті. Тоді оптимальне керування обчислюється за формулою

$$U_*(X(t),t)=-Q_2^{-1}(t)G^*(t)P(t)X(t).$$

У такий спосіб, ми отримали розв'язок задачі (5.10), (5.11), аналогічний розв'язкові задачі (2.28)-(2.30) (стор. 32).

5.5 Оптимальне керування матричним рівнянням Ляпунова

Розглянемо матричне диференціальне рівняння типу Ляпунова

$$\frac{dX(t)}{dt} = (D(t) + H(t)U(t))\,X(t) + X(t)\,(D(t) + H(t)U(t))^T + R(t) \quad (5.17)$$

з початковою умовою

$$X(t_0) = X_0. \quad (5.18)$$

Тут $X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матриця розв'язків рівняння (5.17), $U(t) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ – матриця керування, $X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – відома симетрична матриця, $D(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H(t) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $R(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – відомі матриці з неперервними компонентами, $R(t) = R^*(t)$, $t \in [t_0, T]$. Розв'язки задачі (5.17), (5.18) є симетричними матрицями.

Задача полягає у визначені матриці керування $U_*(t) \in \mathbb{R}^{k\times n}$, яка мінімізує функціонал

$$\mathcal{I}(U) = \mu \int_{t_0}^{T} tr(U(t)X(t)U(t)^*)dt + tr\,(S^*X(T)S)\,. \quad (5.19)$$

Тут $\mu > 0$, $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – відома матриця. Позначимо

$$\mathcal{H}(\mathcal{B}, X, U, s) = tr\left[\frac{\partial \mathcal{B}^*(X,s)}{\partial X}\,(D(s) + H(s)U)\,X + \right.$$

$$\left. + X\,(D(s) + H(s)U)^* + R(s)\right] +$$

$$+\mu tr\,(UXU^*)\,,$$

де $X = X(s)$.

Оптимальне керування $U_*(s) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ шукаємо з умови

$$\frac{\partial}{\partial U}\mathcal{H}(\mathcal{B}, X, U, s) = 0.$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial U} tr \frac{\partial \mathcal{B}^*(X,s)}{\partial X}\,(D(s) + H(s)U)\,X = H^*(s)\frac{\partial \mathcal{B}(X,s)}{\partial X}X^*,$$

$$\frac{\partial}{\partial U} tr \frac{\partial \mathcal{B}^*(X,s)}{\partial X}X\,(D(s) + H(s)U)^* = H^*(s)\frac{\partial \mathcal{B}^*(X,s)}{\partial X}X^*,$$

$$\frac{\partial}{\partial U} tr\,(UXU^*) = U\,(X + X^*)$$

і матриця X є симетрична, то

$$\frac{\partial}{\partial U}\mathcal{H}(\mathcal{B}, X, U, s) = H^*(s)\left(\frac{\partial \mathcal{B}(X,s)}{\partial X} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \mathcal{B}^*(X,s)}{\partial X}\right) X + 2\mu U X.$$

Звідси знаходимо

$$U_*(s) = -\frac{1}{2\mu} H^*(s)\left(\frac{\partial \mathcal{B}(X,s)}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{B}^*(X,s)}{\partial X}\right).$$

Вибираємо функцію Белмана у вигляді

$$\mathcal{B}(X, s) = tr\Omega^*(s)X + tr\Psi(s),$$

де $\Omega(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Psi(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – невідомі матриці, які необхідно визначити, $\Omega(s) = \Omega^*(s)$. Оскільки $\frac{\partial \mathcal{B}(X,s)}{\partial X} = \frac{\partial \mathcal{B}^*(X,s)}{\partial X} = \Omega(s)$, то

$$U_*(s) = -\frac{1}{\mu} H^*(s)\Omega(s).$$

Матриці $\Omega(s)$, $\Psi(s)$ будемо визначати з рівняння

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial s} + \mathcal{H}(\mathcal{B}, X, U_*, s) = 0,$$

яке має вигляд

$$\begin{aligned} & tr\frac{d\Omega^*(s)}{ds}X + tr\frac{d\Psi(s)}{ds} + \\ & + tr\Omega(s)\left[\left(D(s) - \frac{1}{\mu}H(s)H^*(s)\Omega(s)\right)X + \right. \\ & \left. + X\left(D(s) - \frac{1}{\mu}H(s)H^*(s)\Omega(s)\right)^* + R(s)\right] + \\ & + \frac{1}{\mu}tr\left(H^*(s)\Omega(s)X\Omega(s)H(s)\right) = 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Проведемо наступні перетворення

$$tr\Omega(s)X\left(D(s) - \frac{1}{\mu}H(s)H^*(s)\Omega(s)\right)^* =$$

$$= tr\left(D(s) - \frac{1}{\mu}H(s)H^*(s)\Omega(s)\right)^*\Omega(s)X,$$

$$tr\left(H^*(s)\Omega(s)X\Omega(s)H(s)\right) = tr\left(\Omega(s)H(s)H^*(s)\Omega(s)X\right).$$

З (5.20) отримуємо

$$tr\left(\frac{d\Omega(s)}{ds} + \Omega(s)\left(D(s) - \frac{1}{\mu}H(s)H^*(s)\Omega(s)\right) + \right.$$

$$+\left(D(s) - \frac{1}{\mu}H(s)H^*(s)\Omega(s)\right)^*\Omega(s) +$$

$$\left. + \frac{1}{\mu}\Omega(s)H(s)H^*(s)\Omega(s)\right)X + tr\left(\frac{d\Psi(s)}{ds} + \Omega(s)H(s)\right) = 0.$$

При цьому $\mathcal{B}(X,T) = tr(\Omega^*(T)X + \Psi(T)) = tr(S^*X(T)S)$. Так, для визначення $\Omega(s)$, $\Psi(s)$ отримуємо дві задачі Коші

$$\begin{aligned} &\frac{d\Omega(s)}{ds} + \Omega(s)D(s) + D^*(s)\Omega(s) - \frac{2}{\mu}\Omega(s)H(s)H^*(s)\Omega(s) + \\ &+ \frac{1}{\mu}\Omega(s)H(s)H^T(s)\Omega(s) = 0, \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\Omega(T) = S^*S, \tag{5.22}$$

$$\frac{d\Psi(s)}{ds} + \Omega(s)H(s) = 0, \tag{5.23}$$

$$\Psi(T) = 0, \tag{5.24}$$

де $s \in [t_0, T]$. Оптимальне значення критерію якості

$$\mathcal{I}_* = tr\Omega^*(t_0)X_0 + tr\Psi(t_0).$$

Література: [3]

Лекція 6

Узагальнений принцип Белмана

Як було показано вище (приклад 2.1, стор. 20), не для всіх задач оптимального керування має місце принцип оптимальності Белмана. Аналіз доведення принципу оптимальності показує, що важливу роль відіграє вид критерію якості. А саме, критерій якості в задачі Больца є адитивний за множиною визначеності. Це дозволяє поставити допоміжну задачу на вужчій множині. Вид диференціального зв'язку не є принциповим, головне, щоб для кожного допустимого керування існував розв'язок задачі Коші. Але в допоміжній задачі початкова умова фіксується на оптимальній траєкторії і це є принциповий момент, який демонструє природу розв'язків диференціальних рівнянь, а саме – не допускається розриву траєкторії для задачі Больца.

Вказані закономірності лежать в основі узагальненого принципу Белмана. Він полягає в тому, щоб показати, що аналог принципу оптимальності виконується для досить широкого класу задач оптимізації адитивної функції множин і, виходячи з узагальненого принципу Белмана, можна довести принцип оптимальності для різних класів оптимізаційних задач.

Нехай $\mathcal{X}$ – *основний* простір. Це означає, що всі множини, які розглядаються, належать простору $\mathcal{X}$. Під *класом множин* ми будемо розуміти сукупність множин з основного простору. *Функцією множин* називають функцію, що визначена на класі множин, значення якої належать $\mathbb{R}^1$. Важливими прикладами функції множин є міра Лебега, функція ймовірності.

Розглянемо три задачі оптимізації функції множин. Для кожної з цих задач принцип оптимальності буде мати свій вигляд.

6.1 Задача 1

Нехай $T = \{E : E \subseteq \mathfrak{X}\}$– непорожній клас множин. Побудуємо клас $\Re$, для якого виконуються наступні умови:

1. клас $\Re$ містить T і не співпадає з T, тобто $\Re \supset T$;
2. для будь-якої множини $E \in \Re$ і довільної її підмножини F виконується $F \in \Re$ (умова спадковості);
3. якщо $E \in \Re$ та $F \in \Re$ то $E \bigcup F \in \Re$, $E/F \in \Re$ (умова кільця).

Визначимо на класі $\Re$ обмежену невід'ємну функцію множин $\mu : \Re \to \mathbb{R}^1$ таку, що:

1. на порожній множині функція μ рівна нулю: $\mu(\emptyset) = 0$;
2. для будь-яких множин E і F з класу $\Re$ таких, що $E \bigcap F = \emptyset$ виконується
$$\mu\left(E \bigcup F\right) = \mu(E) + \mu(F)$$
(умова адитивності).

Задача оптимізації функції множин μ на класі $\Re$ полягає в тому, щоб знайти множину A_* таку, що

$$\max_{E \in \Re} \mu(E) = \mu(A_*).$$

Побудуємо клас $\Im = \Re/T$. Нехай $\Im$ – непорожній клас. Розглянемо *допоміжну задачу*: знайти множину B_* таку, що $\max\limits_{E \in \Im} \mu(E) = \mu(B_*)$. Припустимо, що $\mu(A_*) > 0$, $\mu(B_*) > 0$.

Теорема 6.1 (множинний принцип оптимальності)**.** *З точністю до множин, на яких функція μ рівна нулю, має місце співвідношення $B_* \subseteq A_*$.*

Доведення. Нехай умова $B_* \subseteq A_*$ не виконується. Якщо $B_* \bigcap A_* = \emptyset$, тоді з властивостей функції μ випливає, що виконується

$$\mu\left(A_* \bigcup B_*\right) = \mu(A_*) + \mu(B_*) > \mu(B_*).$$

Так як $A_* \bigcup B_* \in \Re$, то отримали протиріччя тому, що множина A_* – розв'язок задачі оптимізації функції μ на класі $\Re$. Отже, $B_* \bigcap A_* \neq \emptyset$. Тоді множина $H = B_*/A_*$ є множиною, для якої $\mu(H) = 0$. Справді, з того, що $B_* \in \Re$ і з умови кільця слідує, що $H \in \Re$ і $A_* \bigcup H \in \Re$. Оскільки

$A_* \bigcap H = \emptyset$, то з властивостей функції μ випливає, що $\mu \left(A_* \bigcup H\right) = \mu \left(A_*\right) + \mu \left(H\right) \geq \mu \left(A_*\right)$. Але множина A_*– розв'язок задачі оптимізації функції μ на класі $\Re$. Тому $\mu \left(A_* \bigcup H\right) = \mu \left(A_*\right)$. А це має місце, коли $\mu \left(H\right) = 0$. Тобто, $B_* \subseteq A_*$ з точністю до множини, на якій функція μ дорівнює нулю. $\square$

Наслідок. Якщо μ – обмежена міра на кільці $\Re$, то для неї виконується множинний принцип оптимальності. Зокрема, множинний принцип оптимальності виконується для ймовірнісної міри.

6.2 Задача 2

Нехай A – деяка непорожня множина, $S = \{C : C \subseteq A\}$ – фіксований клас множин такий, що якщо $P \in S$, $Q \in S$, то $P \bigcup Q \in S$, $P/Q \in S$. Визначимо для кожного $C \in S$ непорожній клас множин $\Re\left(C\right) = \{E : E \subset X\}$ основного простору X. Для будь-якої множини $C \in S$ визначимо клас

$$B_C = \{L : L = C \times B,\ B \in \Re(C)\}\,,$$

де $\times$ – знак декартового добутку. З допомогою сукупності класів B_C, $C \in S$ визначимо клас $\Im_A$ такий, що:

1. для довільної множини $C \in S$ виконується $\Im_A \supset B_C$;
2. для будь-яких множин $C \in S$, $F \in S$ і довільних множин $L \in B_C$, $M \in B_F$ виконується $L \bigcup M \in \Im_A$ (умова адитивності).

З означення класу $\Im_A$ випливає, що довільну множину $L \in \Im_A$ можна подати у вигляді $L = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \times E_i$, де $C_i \in S$, $C_i \bigcap\limits_{i \neq j} C_j = \emptyset$, $E_i \in \Re\left(C\right)$, $i, j = 1, 2..., n$, n – деяке натуральне число.

Визначимо на класі $\Im_A$ обмежену функцію множин $\sigma : \Im_A \to \mathbb{R}^1$ таку, що

1. на порожній множині $\sigma\left(\emptyset\right) = 0$;
2. якщо множини L і M належать класу $\Im_A$ і $L \bigcap M = \emptyset$, то $\sigma\left(L \bigcup M\right) = \sigma\left(L\right) + \sigma\left(M\right)$.

Задача оптимізації функції множин σ на класі $\Im_A$ полягає в тому, щоб знайти множину G_* таку, що

$$\min_{E \in \Im_A} \sigma\ (E) = \sigma\ (G_*)\,.$$

Зафіксуємо множину $B \in S$. Розглянемо клас $\bar{S} = \{C \bigcap B : C \in S\}$ і за його допомогою побудуємо клас $\Im_B$ аналогічно класу $\Im_A$. Допоміжна задача полягає в тому, щоб знайти множину H_* таку, що $\min\limits_{E \in \Im_B} \sigma\,(E) = \sigma\,(H_*)$.

Множину G_* можна представити у вигляді $G_* = \bigcup\limits_{i=1}^{m} G_i \times E_i$, де $G_i \in S$ і знайдеться $C \in S$ таке, що $E_i \in \Re(C)$, $G_i \bigcap\limits_{i \neq j} G_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2..., m$, m – деяке натуральне число та для довільних $k = 1, 2, ..., m$ виконується або умова $G_k \bigcap B = \emptyset$, або умова $G_k \subseteq B$. Останнє випливає зі співвідношення

$$G_k \times E_k = \{(G_k/B) \times E_k\} \bigcup \left\{ \left(G_k \bigcap B \right) \times E_k \right\},$$

де $(G_k/B) \bigcap B = \emptyset$, $(G_k \bigcap B) \subseteq B$. Має місце таке твердження.

Теорема 6.2. *Розв'язок допоміжної задачі*

$$H_* = \bigcup_{i \in I} G_i \times E_i,$$

де $I = \{\, i : G_i \subseteq B, i = 1, 2, ..., m \,\}$.

Доведення. З побудови класу $\Im_A$ випливає, що множина $H_* \in \Im_A$. Нехай $E_0 \in \Im_B$– множина, яка є розв'язком допоміжної задачі і $E_0 \neq H_*$, $\sigma\,(E_0) < \sigma\,(H_*)$. Тоді $E_0 = \bigcup_{i=1}^{k} C_i \times E_i$, де $C_i \in \bar{S}$, $E_i^0 \in \Re\,(C)$, $i = 1, 2..., k$, k – деяке натуральне число. Позначимо $F_0 = \bigcup_{i \in J} G_i \times E_i$, де $J = \{\, i : G_i \bigcap B = \emptyset, i = 1, 2, ..., m \,\}$. За побудовою множин E_0 і F_0 виконуються співвідношення $E_0 \bigcap F_0 = \emptyset$, $F_0 \subset G_*$, $F_0 \in \Im_A$. Нехай $H_0 = E_0 \bigcup F_0$. З умови адитивності функції σ маємо

$$\sigma\,(H_0) = \sigma\,(F_0) + \sigma\,(E_0) < \sigma\,(H_*) + \sigma\,(F_0) = \sigma\left(H_* \bigcup F_0 \right).$$

Але $H_* \bigcup F_0 = G_*$. Отже, $\sigma\,(H_0) < \sigma\,(G_*)$, що суперечить тому, що G_* – розв'язок задачі оптимізації функції σ на класі $\Im_A$. □

Зауваження. а) Визначаючи клас $\Im_A$, умову 2 можна замінити на умову: для будь-яких множин $C \in S$, $F \in S$, $F \bigcap C = \emptyset$ і довільних множин $L \in B_C$, $M \in B_F$ виконується $L \bigcup M \in \Im_A$.

Якщо S є класом всіх підмножин множини A, то умову 2 можна розглядати в більш простому вигляді: для довільної множини $C \subset A$ і будь-яких множин $L \in B_C$, $M \in B_{A/C}$ виконується $L \bigcup M \in \Im_A$. Тоді множини класу $\Im_A$ будуть мати структуру $(C \times E_1) \bigcup ((A/C) \times E_2)$, $E_1 \in \Re(C)$, $E_2 \in \Re(A/C)$, $C \subset A$. Їх можна подати у вигляді

$$(D_1 \times E_1) \bigcup (D_2 \times E_1) \bigcup (D_3 \times E_2) \bigcup (D_4 \times E_2),$$

де $D_1 = C\bigcap B$, $D_2 = C/B$, $D_3 = (A/C)\bigcap B$, $D_4 = (A/C)/B$.

б) Визначаючи функцію σ, умову 2 можна замінити на умову якщо $C \in S$, $F \in S$, $F\bigcap C = \emptyset$ та $L \in B_C$, $M \in B_F$, то $\sigma(L\bigcup M) = \sigma(L) + \sigma(M)$. Тоді теорема 6.2 також буде мати місце.

в) Класи B_C, $C \subseteq A$ можна визначити, виходячи з різних непорожніх класів $\Re(C)$. Тоді $B_C = \{L : L = C \times E,\ E \in \Re(C)\}$.

6.3 Задача 3

Розглянемо випадок, коли множина A є обмеженою підмножиною деякої впорядкованої множини. Нехай $h = \sup A$, $h \in A$, $\Re = \{E : E \subset \mathfrak{X}\}$ – фіксований клас множин простору $\mathfrak{X}$, $B \subseteq A$ – непорожня множина, $\Psi = \{\psi : A \to \Re\}$ – множина однозначних функцій така, що як тільки $\varphi_i \in \Psi$, $i = 1, 2$ і $\varphi_1(d) = \varphi_2(d)$, $d \in B$, то $\varphi \in \Psi$, де $D = \{p : p \geq d, p \in A\}$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & \text{якщо } t \in D, \\ \varphi_2(t), & \text{якщо } t \in A/D. \end{cases}$$

Розглянемо клас $\Im_A$ множин виду

$$L = \{(a, \Phi_a) : \psi_L(a) = \Phi_a, a \in A, \Phi_a \in \Re\}, \psi_L \in \Psi.$$

Нехай $\sigma : \Im_A \to \mathbb{R}^1$ є обмеженою функцією такою, що

1. на порожній множині функція $\sigma(\emptyset) = 0$;

2. для довільної точки $d \in B$ і для довільних множин $L \in \Im_D$, $M \in \Im_{A/D}$ виконується $\sigma(L\bigcup M) = \sigma(L) + \sigma(M)$, де $D = \{p : p \geq d, p \in A\}$.

Визначимо функцію $m(L) = \sigma(L) + \rho(\psi_L(h))$. Тут $\rho : \Re \to \mathbb{R}^1$– обмежена функція, $L \in \Im_A$, $\psi_L \in \Psi$. Задача оптимізації функції множин m на класі $\Im_A$ полягає в знаходженні множини G_* такої, що

$$\min_{L \in \Im_A} m(L) = m(G_*).$$

Нехай $G_* = \{(a, \Phi_a^*) : \Phi_a^* \in \Re, a \in A\}$. Зафіксуємо точку $d \in B$, $D = \{p : p \geq d, p \in A\}$. Розглянемо допоміжну задачу: знайти множину H_* таку, що $\min\limits_{E \in \Im_D} m(L) = m(H_*)$ при умові $\psi_L(d) = \psi_{G_*}(d)$, $L \in \Im_D$, $\psi_L \in \Psi$, $\psi_{G_*} \in \Psi$.

Теорема 6.3. *Оптимальний розв'язок допоміжної задачі має вигляд*

$$H_* = \{(a, \Phi_a^*) : a \in D\}.$$

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що

$$H_0 = \{(p, Q_p) : Q_p \in \Re, p \in D\}$$

є розв'язком допоміжної задачі, $H_0 \neq H_*$, $m(H_0) < m(H_*)$, $\psi_{H_0}(d) = \psi_{G_*}(d)$, $\psi_{H_0} \in \Psi$. Позначимо $L = \left\{\left(p, \Phi_p^*\right) : p \in A/D\right\}$, $M = \left\{\left(p, \Phi_p^*\right) : p \in D\right\}$. Тоді

$$m\left(G_*\right) = \sigma\left(G_*\right) + \rho\left(\psi_{G_*}\left(h\right)\right) =$$
$$= \sigma\left(L\right) + \sigma\left(M\right) + \rho\left(\psi_M\left(h\right)\right) >$$
$$> \sigma\left(L\right) + \sigma\left(H_0\right) + \rho\left(\psi_{H_0}\left(h\right)\right) = m\left(Q\right),$$

де $Q = L \bigcup M$, $Q \in \Im_A$, $\psi_M \in \Psi$. Отримали протиріччя з тим, що множина G_* – розв'язок задачі оптимізації функції множин m на класі $\Im_A$. $\square$

Виходячи з теореми 6.3, можна довести теореми 2.1, 5.5. У який спосіб застосовується узагальнений принцип Белмана до обґрунтування принципу оптимальності, ми покажемо в наступній лекції на прикладі задачі вибору оптимальної структури динамічної системи.

Література: [3]

Лекція 7

Вибір оптимальної структури динамічної системи

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – фазовий простір і для кожного $t \in [t_0, T]$ визначено множину $\Omega(t) \subseteq X$. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f^{(j_i)}(x,t), t \in (\tau_{i-1}, \tau_i)\,, \tag{7.1}$$

з умовами

$$x(t_0) = x(t_0+0) = x_0, \tag{7.2}$$

$$x(\tau_i+0) = g_{j_i}(x(\tau_i-0), \tau_i), i = 1, 2, \ldots, p. \tag{7.3}$$

Тут $x(t) \in \Omega(t)$ – вектор фазових координат, $t \in [t_0, T]$, $f^{(j)}(x,t)$, $j = 1, 2, \ldots, N$ – вектор-функції розмірності n, які задовольняють умовам існування та єдиності розв'язку задачі Коші, $x_0 \in \Omega(t_0)$, $g_j(x,t)$ – n-вимірні неперервні вектор-функції на $X \times [t_0, T]$, $j = 1, 2, \ldots, N$, $\tau_i \in (t_0, T)$ – точка переключення між $j_{(i+1)}$ і j_i підсистемами системи (7.1), $i = 1, 2, \ldots, p$, $\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_p = T$, p, n, N – деякі натуральні числа. Позначимо $x^j(t) = x(t, s, y, f^{(j)})$ – траєкторія j-ї підсистеми системи (7.1) з початковою умовою $x(s+0) = y$, $\{\tau_i\} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{p-1}\}$ – множина точок переключення, $\left\{f^{(j_i)}\right\} = \left\{f^{(j_1)}, f^{(j_2)}, \ldots, f^{(j_p)}\right\}$ – множина правих частин системи (7.1), що відповідає множині $\{\tau_i\}$, $f^{(j_i)}(x,t) \neq f^{(j_{i+1})}(x,t)$ з точністю до множин ненульової міри, $i = 1, 2, \ldots, p-1$.

7.1 Задача 1

Припустимо, що для задачі (7.1)-(7.3) виконуються такі умови: функції $g_j(x,t)$, $j = 1, 2, \ldots, N$ – відомі, точки τ_i, $i = 1, 2, \ldots, p-1$ – невідомі,

p – невідоме обмежене натуральне число. Пара $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})$ задає структуру системи (7.1). Задача про вибір оптимальної структури системи (7.1) полягає в тому, щоб на відрізку часу $[t_0, T]$ знайти пару множин $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})$, яка б мінімізувала критерій якості

$$\mathcal{J}(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\}) = \int_{t_0}^{T} f_0(x,t)dt + \Phi(x(T)). \tag{7.4}$$

Тут $f_0(x,t)$ – інтегрована за Лебегом на розв'язках системи (7.1) функція при $t \in [t_0, T]$, $\Phi(x)$ – неперервна функція.

Припустимо, що пара $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})^*$ визначає оптимальну структуру системи (7.1), $x^*(t) = x(t, t_0, x_0, (\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})^*)$ – її траєкторія, що відповідає оптимальній структурі.

Розглянемо допоміжну задачу. Зафіксуємо точку $s \in (t_0, T)$. Необхідно мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}_s(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\}) = \int_{s}^{T} f_0(x,t)dt + \Phi(x(T))$$

на траєкторіях системи (7.1), що розглядається на проміжку $t \in (s, T]$ з умовами $x(s+0) = x^*(s+0)$ та (7.3). Має місце наступний принцип оптимальності.

Теорема 7.1. *Якщо* $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})^{**}$ *– розв'язок допоміжної задачі, то на проміжку* $t \in (s, T]$ $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})^* = (\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})^{**}$.

Доведення. Використаємо позначення теореми 6.1. Нехай в умовах задачі 1 (лекція 6, стор. 72) Ψ– клас розв'язків задачі (7.1)-(7.3), $A = [t_0, T]$, $T = supA$, $B = A$. Клас $\mathfrak{A}_A$ є множиною пар $(t, x(t))$, де $t \in A$, $x(t)$ – траєкторія системи (7.1) в силу вибору структури на , $\sigma = \int_{t_0}^{T} f_0(x,t)dt$, $\rho = \Phi(x(T))$, $m = \sigma + \rho = \mathcal{J}$, $s \in B$, $D = [s, T]$. Клас $\mathfrak{A}_D$ є множиною пар $(t, x(t))$, де $t \in D$ з умовою $x(s+0) = x^*(s+0)$ в силу вибору структури. З теореми 6.3 випливає справедливість сформульованого твердження. $\square$

Функція

$$\mathcal{B}(x,s) = \min_{(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})} \left\{ \int_{s}^{T} f_0(x,t)dt + \Phi(x(T)) \right\},$$

що визначена на траєкторіях системи (7.1) при $t \in (s, T]$ з умовами $x(s+0) = x$ та (7.3) є функцією Белмана задачі 1. Згідно з принципом оптимальності

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}(x,s)=\lim_{\varepsilon\to 0}\min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)}\left\{\int_s^{s+\Delta s+\varepsilon} f_0(x,t)dt+\right.\\
&\left.+\,\mathcal{B}(x(s+\Delta s+\epsilon),s+\Delta s+\epsilon)\right\}= \qquad (7.5)\\
&=\min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)}\left\{\int_s^{s+\Delta s} f_0(x,t)dt+\mathcal{B}(x(s+\Delta s+0),s+\Delta s+0)\right\}.
\end{aligned}
$$

Позначимо

$$
G_{j_i}(x(s-0),s)=\begin{cases} x(s), & s\neq\tau_i,\\ g_{j_i}(x(s-0),s), & s=\tau_i.\end{cases}
$$

З (7.5) одержуємо

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}(x,s)=&\min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)}\left\{\int_s^{s+\Delta s} f_0(x,t)dt+\right.\\
&\left.+\,\mathcal{B}(G_{j_i}(x(s+\Delta s-0),s+\Delta s),s+\Delta s+0)\right\}.
\end{aligned} \qquad (7.6)
$$

Рівняння (7.6) розглядається на траєкторіях даної системи і є рівнянням Беллмана в інтегральній формі для задачі 1. Ураховуючи, що p – скінченне число, можемо для точки s вибрати таке $\Delta s>0$, що $(s,s+\Delta s)$ не містить точок τ_i. Припустимо, що функція $\mathcal{B}(x,s)$ – неперервно диференційована, $f_0(x,t)$ – неперервна, $\theta\in(s,s+\Delta s)$. З (7.5) маємо

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}(x,s)=&\min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)}\left\{f_0(x(\theta),\theta)\Delta s+\mathcal{B}(x,s)+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial s}\Delta s+\right.\\
&\left.+\,grad^*\mathcal{B}(x,s)(x(s+\Delta s)-x)+o(\Delta s)\right\}.
\end{aligned}
$$

Поділивши останній вираз на Δs і перейшовши до границі при $\Delta s\to 0$, отримаємо

$$
\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial s}+\min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)}\{f_0(x,s+0)+grad^*\mathcal{B}(x,s+0)f^{(j_i)}(x,s+0)\}=0, \qquad (7.7)
$$

$$
x\in\Omega(s+0),\mathcal{B}(x,T)=\Phi(x),x=G_{j_{(i-1)}}(z,s),z\in\Omega(s-0). \qquad (7.8)
$$

Рівняння (7.7), (7.8) є рівнянням Белмана в диференціальній формі для задачі 1.

7.2 Задача 2

Розглянемо задачу (7.1)-(7.3) з нефіксованим лівим кінцем за умови, що точки τ_i та функції $g_j(x,t)$ – невідомі, $i = 1, 2, \ldots, p-1$, $j = 1, 2, \ldots, N$, p – невідоме обмежене число. Тоді структура системи (7.1) задається трійкою множин $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}, \{\Delta x(\tau_i)\})$ та вектором $x_0^* \in \Omega(t_0)$, який визначає оптимальну початкову умову для системи (7.1). Тут $\Delta x(\tau_i) = x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0)$. Задача 2 полягає в тому, щоб знайти оптимальну структуру системи (7.1) в заданих обмеженнях, тобто таку структуру, яка мінімізує критерій якості

$$\mathcal{J}(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\}, \{\Delta x(\tau_i)\}, x_0) = \int_{t_0}^{T} f_0(x,t)dt. \qquad (7.9)$$

Розглянемо допоміжну задачу. Зафіксуємо деякі моменти часу s_1 та s_2, $s_1 < s_2$, $s_i \in (t_0, T)$, $i = 1, 2$. Необхідно на відрізку $[s_1, s_2]$ вибрати структуру системи (7.1), яка б мінімізувала критерій якості

$$\mathcal{J}_{s_1,s_2}(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\}, \{\Delta x(\tau_i)\}, x(s_1)) = \int_{s_1}^{s_2} f_0(x,t)dt. \qquad (7.10)$$

Має місце наступний принцип оптимальності.

Теорема 7.2. *Якщо* $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}, \{\Delta x(\tau_i)\})^*$ *– оптимальна структура системи* (7.1) *задачі 2,* $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}, \{\Delta x(\tau_i)\})^{**}$ *– оптимальна структура допоміжної задачі, то на відрізку* $[s_1, s_2]$

$$(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}, \{\Delta x(\tau_i)\})^* = (\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}, \{\Delta x(\tau_i)\})^{**}.$$

Доведення. Використаємо позначення, що стосуються теореми 6.2. Ураховуючи зауваження відносно вказаної теореми, побудуємо наступні класи: клас $\mathfrak{R}([t_1, t_2])$, $t_1 < t_2$, $t_i \in [t_0, T]$, $i = 1, 2$ – клас траєкторій системи (7.1) при $t \in [t_1, t_2]$; б) клас $\mathfrak{B}_{[t_1,t_2]} = \{L : L = [t_1, t_2] \times E, E \in \mathfrak{R}([t_1, t_2])\}$; $A = [t_0, T]$, $B = [s_1, s_2]$, $\mathfrak{S}$ – клас всіх підмножин множини A. Класи $\mathfrak{I}_A$, $\mathfrak{I}_B$ визначаються згідно схеми, що відповідає теоремі 6.2 з врахуванням зауважень. Функція множин σ має вигляд $\sigma = \int_{t_0}^{T} f_0(x,t)dt$. На класі $\mathfrak{I}_B$ оптимізується функція множин $\int_{s_1}^{s_2} f_0(x,t)dt$. Тоді справедливість сформульованої теореми випливає з теореми 6.2. □

7.3 Задача 3

Розглянемо задачу (7.1)-(7.3). Нехай точки τ_i та функції $g_j(x,t)$ – відомі, $i = 1, 2, \ldots, p-1$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Тоді структура системи (7.1) задається скінченною множиною $\{f^{(j_i)}\}$. Задача про вибір оптимальної структури системи (7.1) полягає в тому, щоб на відрізку часу $[t_0, T]$ знайти таку множину $\{f^{(j_i)}\}^*$, яка мінімізувала б критерій якості

$$\mathcal{J}(\{f^{(j_i)}\}) = \int_{t_0}^{T} f_0(x,t)dt + \Phi(x(T)). \tag{7.11}$$

Нехай $x^*(t) = x(t, t_0, x_0, \{f^{(j_i)}\}^*)$ – траєкторія системи (7.1), що відповідає її оптимальній структурі. Розглянемо допоміжну задачу. Зафіксуємо точку $s \in (t_0, T)$. Необхідно мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}_s(\{f^{(j_i)}\}) = \int_{t_0}^{T} f_0(x,t)dt + \Phi(x(T)). \tag{7.12}$$

на траєкторіях системи (7.1) при $t \in (s, T]$ з умовами $x(s+0) = x^*(s+0)$ та (7.3). Має місце наступний принцип оптимальності.

Теорема 7.3. *Якщо $s \in \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{p-1}\}$ і $\{f^{(j_i)}\}^{**}$ – оптимальна структура допоміжної задачі, то $\{f^{(j_i)}\}^* = \{f^{(j_i)}\}^{**}$ на проміжку $t \in (s, T]$.*

Доведення. Будемо використовувати позначення теореми 6.3. Нехай в умовах задачі 3 Ψ – клас розв'язків задачі (7.1)-(7.3), $A = [t_0, T]$, $T = \sup A$, $B = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{p-1}\}$. Клас $\mathfrak{I}_A$ є множиною пар $(t, x(t))$, де $t \in A$, $x(t)$ – траєкторія системи (7.1) з умовами (7.2), (7.3) в силу вибору структури на A, $\sigma = \int_{t_0}^{T} f_0(x,t)dt$, $\rho = \Phi(x(T))$, $m = \sigma + \rho = \mathcal{J}$, $s \in B$, $D = [s, T]$. Клас $\mathfrak{I}_D$ є множиною пар $(t, x(t))$, де $t \in D$, $x(t)$ – траєкторія системи (7.1) з умовою $x(s+0) = x^*(s+0)$. З теореми 6.3 випливає справедливість сформульованого твердження. $\square$

Функція

$$\mathcal{B}(x,s) = \min_{\left(\{f^{(j_i)}\}\right)} \left\{ \int_{s}^{T} f_0(x,t)dt + \Phi(x(T)) \right\},$$

що визначена на траєкторіях системи (7.1) з умовами $x(s+0) = x^*(s+0)$ та (7.3) є функцією Белмана задачі 3. Згідно з теоремою 7.3

$$\mathcal{B}(x, \tau_{i-1}+0) = \min_{j_i} \left\{ \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_0(x,t)dt + \mathcal{B}(x(\tau_i+0), \tau_i+0) \right\}.$$

З (7.3)

$$\mathcal{B}(x, \tau_{i-1}+0) = \min_{j_i} \left\{ \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_0(x,t)dt + \mathcal{B}(g_{j_i}(x(\tau_i-0), \tau_i), \tau_i+0) \right\}. \tag{7.13}$$

Рівняння (7.13) розглядається на траєкторіях системи (7.1) при $x \in \Omega(\tau_{i-1})$ і є рівнянням Белмана задачі 3 в інтегральній формі.

Література: $[3, 6]$

Лекція 8

Стабілізація системи керування

8.1 Постановка задачі стабілізації

Розглянемо систему керування вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(x(t), t), t), \tag{8.1}$$

де $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – вектор керування, що приймає значення з множини $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, $0 \in \mathcal{U}$, $f(x, u, t)$ – вектор-функція розмірності n, для якої виконується локальна умова Ліпшиця за x і u, справджується неперервність за t, при цьому $f(0, 0, t) = 0$. Керування системою (8.1) задається в класі керувань з оберненим зв'язком $u = u(x, t)$. Припускається, що $u(0, t) = 0$ і $u(x, t)$ є локально ліпшицевим за x і вимірним за t [1].

Режим $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ називається *програмним*. Програмний режим реалізується системою (8.1) при керуванні $u(t) = u(0, t) = 0$. Керування $u(t) = 0$ також називається *програмним*.

Задача *стабілізації програмного режиму* $x(t) = 0$ полягає у тому, щоб знайти керування $u = u(x, t)$ з оберненим зв'язком так, щоб нульовий розв'язок системи (8.1) був асимптотично стійким (або стійким в цілому) за Ляпуновим.

[1] Вказані умови забезпечують виконання умов існування та єдиності розв'язку задачі Коші та існування нульового розв'язку системи 8.1

8.2 Стабілізація стаціонарних систем

Припустимо, що система керування (8.1) є лінійною, тобто має вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(x(t), t). \tag{8.2}$$

Тут A – $n \times n$- матриця, B– $n \times m$- матриця, при цьому A, B є матрицями з постійними коефіцієнтами.

У цьому випадку розв'язок задачі стабілізації програмного руху може розглядатись у класі керувань з оберненим зв'язком вигляду $u(x,t) = Cx$, де C – матриця розмірності $m \times n$ з постійними коефіцієнтами, яку потрібно визначити. Підставимо керування $u(x,t) = Cx$ в систему (8.2) і отримаємо

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + BC)x(t). \tag{8.3}$$

Запишемо для (8.3) характеристичний многочлен

$$P(\lambda) = \det(A + BC - \lambda I)$$

і характеристичне рівняння $P(\lambda) = 0$. Корені цього рівняння позначимо λ_i, $i = 1, 2, ..., n$. Елементи матриці C потрібно вибрати з умови

$$Re\lambda_i < 0, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Це забезпечить асимптотичну стійкість системи (8.3).

Нехай

$$P(\lambda) = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n, \; p_0 > 0.$$

Знайдемо матрицю Гурвіца

$$G(C) = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & \dots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & \dots & p_n \end{bmatrix}, \; p_i = 0, \; i > n.$$

Критерій Гурвіца полягає у тому, що для коренів λ_i, $i = 1, 2, ..., n$, характеристичного рівняння виконується умова $Re\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, ..., n$, тоді і тільки тоді, коли головні мінори $\Delta_i(C)$ матриці $G(C)$ є додатними, $i = 1, 2, ..., n$ [13].

Таким способом, щоб побудувати регулятор, що розв'язує задачу стабілізації, потрібно розглянути матрицю Гурвіца $G(C)$ і підібрати елементи матриці C так, щоб $\Delta_i(C) > 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Приклад 8.1. Розглянемо систему керування вигляду

$$x'''(t) - 2x''(t) + 3x'(t) - 2x(t) = u. \tag{8.4}$$

Побудуємо регулятор u, який забезпечує асимптотичну стійкість нульовому розв'язку цього рівняння. Регулятор виберемо у вигляді

$$u = ax'' + bx' + cx. \tag{8.5}$$

Тоді з (8.4) отримаємо

$$x''' - (2+a)x'' + (3-b)x' - (2+c)x = 0. \tag{8.6}$$

Запишемо для (8.6) матрицю Гурвіца

$$G(a,b,c) = \begin{pmatrix} -(2+a) & 1 & 0 \\ -(2+c) & (3-b) & -(2+a) \\ 0 & 0 & -(2+c) \end{pmatrix}.$$

Підберемо параметри a, b, c згідно критерія Гурвіца так, щоб

$$\Delta_1 = -(2+a) > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -(2+a) & 1 \\ -(2+c) & 3-b \end{vmatrix} > 0, \det G(a,b,c) > 0.$$

Отже, $a < -2$, $\Delta_3 = -\Delta_2(2+c) > 0$. Тому вибираємо $c < -2$. Мінор

$$\Delta_2 = -(2+a)(3-b) + (2+c) > 0,$$

якщо $3 - b > \frac{2+c}{2+a}$ при умові, що $a < -2$. Тому $b < -\frac{2+c}{2+a} + 3$. Отже, отримали такі умови

$$a < -2,\ b < -\frac{2+c}{2+a} + 3, c < -2.$$

Наприклад, можемо взяти $a = -3$, $b = 1$, $c = -3$. Так, регулятор (8.5) має вигляд

$$u = -3x'' + x' - 3x.$$

Слід зауважити, що при $u = 0$ нульовий розв'язок (8.4) не є стійким. Справді, характеристичний многочлен (8.4) має вигляд

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

і $\lambda = 1$ є його коренем.

8.3 Задача стабілізації і метод функцій Ляпунова

Розглянемо систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), t) + G(x(t), t)u. \tag{8.7}$$

Тут $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор фазових координат, $F(x,t)$ – n- вимірна вектор-функція, неперервна за t і локально ліпшицева за x, $G(x,t)$ – $n \times m$-матриця з компонентами, неперервними за t і локально ліпшицевими за x, u – m- вимірний вектор керування. Керування u вибирається у класі з оберненим зв'язком, $u = u(x,t)$, $u(0,t) = 0$, $F(0,t) = 0$, $t \geq 0$.

Згідно з прямим методом Ляпунова, будь-яке керування u з оберненим зв'язком, яке задовольняє умові

$$\frac{\partial \mathcal{V}(x,t)}{\partial t} + \langle grad_x \mathcal{V}(x,t), F(x,t) + G(x,t)u(x,t)\rangle = -\mathcal{W}(x,t) \tag{8.8}$$

є стабілізуючим законом керування. Тут $\mathcal{V}(x,t)$, $\mathcal{W}(x,t)$ – додатновизначені функції, при цьому $\mathcal{V}(x,t)$ допускає нескінченно малу вищу границю. Отже, в рамках метода функції Ляпунова розв'язок задачі стабілізації зводиться до побудови множини керувань з оберненим зв'язком, що забезпечують виконання співвідношення (8.8). Так,

$$\begin{gathered}\langle G^*(x,t) grad_x \mathcal{V}(x,t), u(x,t)\rangle = \\ = -\mathcal{W}(x,t) - \frac{\partial \mathcal{V}(x,t)}{\partial t} - \langle grad_x \mathcal{V}(x,t), F(x,t)\rangle\,.\end{gathered} \tag{8.9}$$

Подамо функцію керування у вигляді

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t). \tag{8.10}$$

Керування $u_2(x,t)$ вибираємо у вигляді

$$u_2(x,t) = P(x,t)G^*(x,t) grad_x \mathcal{V}(x,t). \tag{8.11}$$

Тут $P(x,t)$ є довільна кососиметрична $m \times m$ - матриця , тобто, $P^*(x,t) = -P(x,t)$. Оскільки $\langle z, P(x,t)z\rangle = 0$ для довільного вектора $z \in \mathbb{R}^m$, то

$$\begin{gathered}\langle G^*(x,t) grad_x \mathcal{V}(x,t), u_2(x,t)\rangle = \\ = \langle G^*(x,t) grad_x \mathcal{V}(x,t), P(x,t)G^*(x,t) grad_x \mathcal{V}(x,t)\rangle = 0.\end{gathered}$$

Керування $u_1(x,t)$ вибирається у вигляді

$$u_1(x,t) = -\lambda(x,t)G^*(x,t)grad_x\mathcal{V}(x,t), \tag{8.12}$$

де $\lambda(x,t)$ – скалярна функція, яку потрібно визначити. Підставимо (8.10)-(8.12) у (8.9). Отримуємо

$$\lambda(x,t) = \frac{\mathcal{W}(x,t) + \frac{\partial\mathcal{V}(x,t)}{\partial t} + \langle grad_x\mathcal{V}(x,t), F(x,t)\rangle}{\left\|G^*(x,t)grad_x\mathcal{V}(x,t)\right\|^2}. \tag{8.13}$$

Отже, разом з (8.13) керування (8.10) розв'язує поставлену задачу стабілізації.

8.4 Гасіння кутових швидкостей твердого тіла

Математична модель має вигляд системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\omega}{dt} = -\mathcal{J}^{-1}(\omega \times \mathcal{J}\omega) + \mathcal{J}^{-1}u \tag{8.14}$$

де $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$ – вектор кутових швидкостей, $\mathcal{J}$ – тензор інерції, який є додатно визначеною симетричною матрицею розмірності 3×3, $\times$ – знак векторного добутку, $u = (u_1, u_2, u_3)^*$ – вектор керування (вектор моментів) [21, 25].

Функцію Ляпунова виберемо у вигляді

$$\mathcal{V}(\omega) = \left\|\mathcal{J}\omega\right\|^2.$$

Похідна $grad\mathcal{V} = 2\mathcal{J}^*\mathcal{J}\omega$. Тоді керування u_1, u_2 згідно (8.10)-(8.13) вибирається у вигляді

$$u_1(\omega,t) = -2\lambda\mathcal{J}\omega,\ u_2(\omega,t) = P(\omega,t)\mathcal{J}\omega$$

і стабілізуюче керування

$$u(\omega,t) = u_1(\omega,t) + u_2(\omega,t) = 2(P(\omega,t) - \lambda I)\mathcal{J}\omega. \tag{8.15}$$

Тут I – одинична матриця розмірності 3×3, $\lambda > 0$ – довільна константа,

$$P(\omega,t) = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ -p_{12} & 0 & p_{23} \\ -p_{13} & -p_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

$p_{ij} = p_{ij}(\omega, t)$ – довільні функції, $i, j = 1, 2, 3$.

Покажемо, що згідно (8.9) можна підібрати функцію $\mathcal{W}(\omega)$, яка є додатновизначеною. Справді, з (8.9) випливає, що

$$\mathcal{W}(\omega) = -\left\langle grad\mathcal{V}(\omega), \mathcal{J}^{-1}\omega \times \mathcal{J}\omega - 2\mathcal{J}^{-1}(-\lambda I + P(\omega,t))\mathcal{J}^{-1}\omega\right\rangle =$$
$$= -\left\langle 2\omega, \mathcal{J}^{-1}\omega \times \mathcal{J}\omega\right\rangle + \left\langle 4\lambda\omega, (\mathcal{J}^{-1})^2\omega\right\rangle + \left\langle 4\omega, \mathcal{J}^{-1}P(\omega,t)\mathcal{J}^{-1}\omega\right\rangle.$$

Доданок $\langle 4\omega, \mathcal{J}^{-1}P(\omega,t)\mathcal{J}^{-1}\omega\rangle = 0$, так як матриця P є кососиметрична. Тоді

$$\mathcal{W}(\omega) = -2\left\langle \mathcal{J}^*\mathcal{J}\mathcal{J}^{-1}\omega \times \mathcal{J}\omega, \omega\right\rangle -$$
$$-4\left\langle \mathcal{J}^*\mathcal{J}(\mathcal{J}^{-1}(P(\omega,t) - \lambda I)\mathcal{J}\omega), \omega\right\rangle = 4\left\langle \mathcal{J}^*\mathcal{J}\omega, \lambda\omega\right\rangle.$$

Тут були використані співвідношення

$$\left\langle \mathcal{J}^*\mathcal{J}\mathcal{J}^{-1}(\omega \times \mathcal{J}\omega), \omega\right\rangle = \left\langle \mathcal{J}\mathcal{J}^{-1}(\omega \times \mathcal{J}\omega), \mathcal{J}\omega\right\rangle = \langle \omega \times \mathcal{J}\omega, \mathcal{J}\omega\rangle = 0,$$
$$\langle P(\omega,t)\mathcal{J}\omega, \mathcal{J}\omega\rangle = 0.$$

Так, функція

$$\mathcal{W}(\omega) = 4\left\langle \mathcal{J}^*\mathcal{J}\omega, \lambda\omega\right\rangle$$

є додатновизначеною і керування (8.15) забезпечує асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (8.14).

Але функцію Ляпунова можна будувати по різному, головне, щоб виконувались теореми про стійкість. Виберемо функцію Ляпунова у вигляді

$$\mathcal{V}(\omega) = \|\mathcal{J}\omega\|. \tag{8.16}$$

Ця функція є додатновизначеною. Градієнт

$$grad\mathcal{V}(\omega) = \mathcal{J}^*\frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|}.$$

Тоді, застосовуючи запропонований в попередньому пункті підхід, отримаємо

$$u_1(\omega,t) = -\lambda\left(\mathcal{J}^{-1}\right)^*\mathcal{J}^*\frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|} = -\lambda\frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|},\ \lambda > 0.$$
$$u_2(\omega,t) = P(\omega,t)\left(\mathcal{J}^{-1}\right)^*\mathcal{J}^*\frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|} = P(\omega,t)\frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|}.$$

Регулятор має вигляд

$$u(\omega,t) = (P(\omega,t) - \lambda I)\frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|}. \tag{8.17}$$

Підберемо функцію $\mathcal{W}(\omega, t)$ у вигляді

$$\mathcal{W}(\omega,t) = -\left\langle grad\mathcal{V}\left(-\mathcal{J}^{-1}(\omega\times\mathcal{J}\omega)+\mathcal{J}^{-1}u\right)\right\rangle =$$
$$= \left\langle \mathcal{J}^{*}\frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|}, \mathcal{J}^{-1}(\omega\times\mathcal{J}\omega)\right\rangle - \left\langle \mathcal{J}^{*}\frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|}, \mathcal{J}^{-1}\left[-\lambda I + P(\omega,t)\right]\frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|}\right\rangle =$$
$$= \frac{\langle\mathcal{J}\omega, \omega\times\mathcal{J}\omega\rangle}{\|\mathcal{J}\omega\|} - \left\langle \frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|}, \left[-\lambda I + P(\omega,t)\right]\frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|}\right\rangle.$$

Оскільки $\langle\mathcal{J}\omega, \omega\times\mathcal{J}\omega\rangle = 0$, то

$$\mathcal{W}(\omega,t) = \lambda\frac{(\mathcal{J}\omega)^{*}\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|^{2}} - \frac{(\mathcal{J}\omega)^{*}P(\omega,t)\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|^{2}}.$$

Врахуємо, що $P(\omega,t) = -P^{*}(\omega,t)$. Тоді $(\mathcal{J}\omega)^{*}P(\omega,t)\mathcal{J}\omega = 0$. Тому

$$\mathcal{W}(\omega,t) = \mathcal{W}(\omega) = \lambda > 0.$$

Отже, керування (8.17) забезпечує стійкість нульового розв'язку. Раньше було показано, що керування (8.17) при $P = 0$, $\lambda = 1$ є розв'язком задачі оптимальної швидкодії щодо переводу системи з довільної точки в точку нуль (стор. 36). При цьому функція Ляпунова (8.16) співпадає з функцією Белмана (2.53) при $\rho = 1$, $\varepsilon = 1$ (стор. 37). Таким способом, між задачами стабілізації та оптимального керування існує взаємозв'язок. Для ряду задач функція Белмана може виступати у ролі функції Ляпунова, забезпечуючи асимптотично стійкий режим для оптимальної траєкторії.

8.5 Задача оптимальної стабілізації

На розв'язках системи (8.1) розглядається функціонал

$$\mathcal{I}(u) = \int_{t_0}^{\infty} f_0(x,u,t)dt. \tag{8.18}$$

Тут функція $f_0(x,u,t)$ є інтегрованою на розв'язках системи (8.1). Задача про *оптимальну стабілізацію* полягає у такому.

1. Знайти допустиме керування $u_{*}(x,t)$ в класі керувань з оберненим зв'язком, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (8.1).

2. Яке б не було інше допусиме керування $\hat{u}(x,t)$, що розв'язує задачу 1, виконується нерівність

$$\mathcal{I}(u_*) \le \mathcal{I}(\hat{u}),$$

для всіх початкових умов $x(t_0) = x_0$, $\|x_0\| \le R$.

Функція u_* називається у цьому випадку *оптимальним керуванням*. Позначимо $x_*(\cdot)$ – розв'язок системи (8.1) при $u = u_*(x,t)$. Розглянемо функцію

$$b\left(\mathcal{V},x,u,t\right) = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \langle grad_x \mathcal{V}(x,t), f(x,u,t)\rangle + f_0(x,u,t),$$

де $\mathcal{V}\left(x,t\right)$ – функція Ляпунова, яка є додатновизначеною.

Теорема 8.1 (Красовського)**.** *Якщо для системи диференціальних рівнянь* (8.1) *можна побудувати додатновизначену функцію* $\mathcal{V}_*\left(x,t\right)$*, яка допускає нескінченно малу вищу границю, а також функцію керування* $u_*(x,t)$*, що задовольнє таким умовам:*

1. функція $f_0\left(x,t\right) = f_0\left(x, u_*(x,t), t\right)$ *є додатновизначена;*

2. має місце рівність

$$b\left(\mathcal{V}_*, x, u_*, t\right) = 0; \tag{8.19}$$

3. для довільного допустимого вектора u виконується нерівність

$$b\left(\mathcal{V}_*, x, u, t\right) \ge 0. \tag{8.20}$$

Тоді керування $u_*(x,t)$ *розв'язує задачу оптимальної стабілізації* (8.1), (8.18)*, при цьому*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\left(u_*\right) &= \int_{t_0}^{\infty} f_0(x_*(t), u_*(t), t)dt = \\ &= \inf_{u(t)\in\mathcal{U}} \int_{t_0}^{\infty} f_0(x(t), u(t), t)dt = \mathcal{V}_*\left(x_0, t_0\right), \end{aligned} \tag{8.21}$$

де $u_*(t) = u_*(x_*(t),t)$.

Доведення. При $u = u_*(t)$ функція $\mathcal{V}_*\left(x,t\right)$ задовольняє умовам теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість [2]. Її похідна в силу системи (8.1) визначається згідно співвідношення (8.19) рівністю

$$\frac{d\mathcal{V}_*\left(x_*(t),t\right)}{dt} = -f_0(x_*(t), u_*(t), t) \tag{8.22}$$

[2] [13], стор. 117

і тому є від'ємновизначеною. Доведемо справедливість формули (8.21). Оскільки розв'язок системи (8.1) є асимптотично стійкий, то

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{V}_*\left(x_*(t), t\right) = 0. \tag{8.23}$$

Інтегруємо (8.22) від $t = t_0$ до $t = T$ і враховуємо (8.23). Так, отримуємо

$$\int_{t_0}^{T} \frac{d\mathcal{V}_*\left(x_*(t), t\right)}{dt} dt = \mathcal{V}_*\left(x_*(T), T\right) - \mathcal{V}_*\left(x_*(t_0), t_0\right) =$$
$$= -\int_{t_0}^{T} f_0(x_*(t), u_*(t), t) dt.$$

Тепер при $T \to \infty$ маємо

$$\mathcal{V}_*\left(x_0, t_0\right) = \int_{t_0}^{\infty} f_0(x_*(t), u_*(t), t) dt. \tag{8.24}$$

Нехай, з іншого боку, керування $\hat{u}\left(x, t\right)$ розв'язує задачу стабілізації незбуреного руху. З нерівності (8.20) випливає, що

$$\left(\frac{d\mathcal{V}_*}{dt}\right)_{(8.1)} \geq -f_0\left(\hat{x}\left(t\right), \hat{u}\left(t\right), t\right), \tag{8.25}$$

де $\hat{x}\left(t\right)$ – траєкторія системи (8.1) при керуванні $\hat{u}\left(t\right)$. Інтегруємо (8.25) від t_0 до T і отримуємо

$$\mathcal{V}_*\left(\hat{x}(T), T\right) - \mathcal{V}_*\left(\hat{x}(t_0), t_0\right) = \mathcal{V}_*\left(\hat{x}(T), T\right) - \mathcal{V}_*\left(x_0, t_0\right) \geq$$
$$\geq -\int_{t_0}^{T} f_0\left(\hat{x}\left(t\right), \hat{u}\left(t\right), t\right) dt.$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathcal{V}_*\left(\hat{x}(t), t\right) = 0$, з останньої нерівності отримуємо

$$\mathcal{V}_*\left(x_0, t_0\right) \leq \int_{t_0}^{\infty} f_0\left(\hat{x}\left(t\right), \hat{u}\left(t\right), t\right) dt.$$

Це доводить справедливість формули (8.21). $\square$

Функцію Ляпунова $\mathcal{V}_*\left(x, t\right)$, що задовольняє умовам теореми Красовського, називають *оптимальною.* Розглянемо умови (8.19), (8.20) і порівняємо їх з диференціальним рівнянням Гамільтона-Якобі-Белмана (2.15), стор. 25. Отже, на керуваннях, що забезпечують розв'язок задачі оптимальної стабілізації справджується диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана. У такий спосіб, для задачі оптимальної стабілізації функція Белмана і оптимальна функція Ляпунова співпадають.

Література: $[1, 2, 7, 13, 15, 17, 21, 25]$

Лекція 9

Метод оптимального демпфування

9.1 Оптимальність по відношенню до демпфування функції

Розглянемо систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \tag{9.1}$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $f(x, u, t)$ – n-вимірна вектор-функція, неперервна за сукупністю змінних, $u = u(t)$ – r-вимірний вектор керування, що належить класу кусково неперервних функцій, $u(t) \in G$, G – компакт в $\mathbb{R}^r$, $x(t_0) = x_0$, $t \geq t_0$. Розв'язок системи (9.1), що відповідає керуванню u та початковій умові $x(t_0) = x_0$ будемо позначати $x(t, u, x_0, t_0)$. Нехай

$$S = \{(x, t) : \psi(x, t) = 0\},$$

$\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+1})$ і задача керування системою (9.1) полягає у знаходженні допустимого керування $u(t) \in G$ такого, що інтегральна крива системи (9.1) в деякий момент часу попадає з фіксованого положення на поверхню S. При цьому можуть бути задані обмеження на фазову змінну та керування.

Зрозуміло, що така задача може не мати однозначного розв'язку. Розглянемо функцію $\mathcal{V}(x, t)$, яка характеризує відстань від точки x в момент t до поверхні S. Тоді сформульована задача керування може бути зведена до мінімізації $\mathcal{V}(x, t)$ на розв'язках системи (9.1). У цьому полягає зміст оптимального керування по відношенню до демпфування функції $\mathcal{V}$.

Означення 9.1. *Керування u_* називається оптимальним по відношенню до демпфування функції $\mathcal{V}$, якщо функція $\mathcal{V}$ максимально спадає вздовж траєкторії $x_*(t) = x(t, u_*)$.*

Припустимо, що функція $\mathcal{V}(x, t)$ є неперервно диференційованою. Знайдемо повну похідну функції $\mathcal{V}$ на розв'язках системи (9.1)

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \langle grad_x \mathcal{V}(x, t), f(x, u, t) \rangle = \mathcal{W}(x, u, t). \tag{9.2}$$

Згідно означення, оптимальне керування по відношенню до демпфування функції $\mathcal{V}$ доставляє функції $\mathcal{W}(x, u, t)$ найменше від'ємне значення.

Розглянемо динамічну систему вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \tag{9.3}$$

де A, B – стаціонарні матриці розмірності $n \times n$ та $n \times r$ відповідно. Припустимо, що при керуванні $u = 0$ розв'язок системи (9.3) є асимптотично стійкий за Ляпуновим. Тоді існує функція Ляпунова

$$\mathcal{V}(x) = \langle Dx, x \rangle ,$$

де D є симетрична, додатновизначена матриця розмірності $n \times n$, яка визначається єдиним способом з матричного рівняння Ляпунова

$$A^* D + DA = -I.$$

Тут I – одинична матриця розмірності $n \times n$. Функція $\mathcal{V}(x)$ визначає відстань від точки x до нуля в просторі $\mathbb{R}^n$. Побудуємо керування u так, щоб функція $\mathcal{V}$ спадала найбільшим способом вздовж траєкторії системи (9.3). Припустимо, що на керування накладаються обмеження вигляду

$$|u_i| \leq 1, \;\; i = 1, 2, \dots r.$$

Побудуємо повну похідну функції $\mathcal{V}$ на розв'язках системи (9.3). Отримуємо

$$\mathcal{W}(x, u) = \langle grad \mathcal{V}(x), Ax + Bu \rangle = \langle Dx, Ax \rangle + \langle D^* x, Ax \rangle + 2 \langle Dx, Bu \rangle =$$

$$= \langle (A^* D + DA) x, x \rangle + 2 \langle B^* Dx, u \rangle .$$

Враховуючи матричне рівняння Ляпунова, одержуємо

$$\mathcal{W}(x, u) = - \langle x, x \rangle + 2 \langle B^* Dx, u \rangle =$$

$$= -\langle x, x\rangle + 2\sum_{i=1}^{r}(b_i^* Dx)^* u_i, \tag{9.4}$$

де $b_i \in \mathbb{R}^n$ – стовпчики матриці B.

Оскільки $|u_i| \leq 1,\ i = 1, 2, \dots r$, то з (9.4) випливає, що функція $\mathcal{W}$ отримує найменше значення при

$$(u_j)_* = -sign(b_j^* Dx). \tag{9.5}$$

Підставляючи (9.5) в (9.3), отримуємо оптимальну систему керування по відношенню до демпфування функції $\mathcal{V}(x,t)$, в якій права частина є розривною. Поверхня розриву визначається рівняннями

$$b_j^* Dx = 0,\ j = 1, 2, ..., r.$$

9.2 Зв'язок з оптимальними за швидкодією процесами

Розглянемо, як приклад, систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \tag{9.6}$$

де $r = n$, $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$. Покладемо

$$\mathcal{V}(x) = \|x\|.$$

Керування, що є оптимальним по відношенню до демпфування функції $\mathcal{V}$, визначається шляхом знаходження найменшого можливого значення

$$\mathcal{W}(x,u) = \langle grad\mathcal{V}(x), u\rangle = \frac{\langle x, u\rangle}{\|x\|}$$

за умови $\|u\|^2 = 1$. Одержали задачу на умовний екстремум. Оптимальна точка

$$u_* = -\frac{x}{\|x\|}. \tag{9.7}$$

Так, підставивши (9.7) в (9.6), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\|x\|}.$$

Виявляється, що керування (9.7) є оптимальним за швидкодією для системи (9.6) при умові, що

$$\|u\|^2 = 1, \; x(0) = x_0, \; x(T) = 0,$$

де T – час перехідного процесу. Справді, запишемо рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана (2.27)

$$\min_{\|u\|=1} \langle grad\mathcal{B}(x), u\rangle = -1, \tag{9.8}$$

де $\mathcal{B}(x)$ – функція Белмана. Розв'язавши задачу (9.8), отримаємо

$$u_{**} = -\frac{grad\mathcal{B}(x)}{\|grad\mathcal{B}(x)\|}. \tag{9.9}$$

Підставимо (9.9) в (9.8) і знаходимо рівняння для визначення функції Белмана

$$\|grad\mathcal{B}(x)\| = 1. \tag{9.10}$$

З (9.10) слідує $grad\mathcal{B}(x) = \frac{x}{\|x\|}$ і $\mathcal{B}(x) = \|x\|$.

Отже, оптимальне керування (9.9) для задачі швидкодії співпадає з оптимальним керуванням (9.7) по відношенню до демпфування функції

$$\mathcal{V}(x) = \|x\|,$$

а функція Белмана співпадає з $\mathcal{V}(x)$. При цьому мінімальний час перехідного процесу $T = \mathcal{B}(x_0) = \|x_0\|$. Розглянемо твердження.

Теорема 9.1. *Нехай виконуються такі умови:*

1. *керування u_* є оптимальним по відношенню до демпфування функції $\mathcal{V}(x,t)$;*
2. *функція $\mathcal{V}(x,t) > 0$ коли $\psi(x,t) \neq 0$ і $\mathcal{V}(x,t) = 0$ при $\psi(x,t) = 0$;*
3. *повна похідна функції $\mathcal{V}(x,t)$ на розв'язках системи* (9.1) *при керуванні $u = u_*$ рівна -1.*

Тоді керування u_* є оптимальним за швидкодією при переводі системи (9.1) *зі стану $x(t_0) = x_0$ на поверхню $S = \{(x,t) : \psi(x,t) = 0\}$.*

Доведення. За умовою теореми, вздовж розв'язку $x_*(t) = x(t, u_*, x_0, t_0)$ має місце рівність $\frac{d\mathcal{V}}{dt} = -1$. Звідси

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\mathcal{V}}{ds} ds = \mathcal{V}(x(t, u_*, x_0, t_0), t) - \mathcal{V}(x_0, t_0) = -(t - t_0)$$

і $\mathcal{V}(x(t,u_*,x_0,t_0),t) = \mathcal{V}(x_0,t_0)+t_0-t$. Таким способом, при $t=t_1=\mathcal{V}(x_0,t_0)+t_0$ виконується рівність $\mathcal{V}(x(t,u_*,x_0,t_0),t)=0$. Але $\mathcal{V}(x,t)=0$ лише у випадку, коли $\psi(x,t)=0$. Тому існує момент $t_1\geq t_0$ такий, що $x_*(t_1)\in S$.

Припустимо, що час $T=t_1-t_0$ не є оптимальним за швидкодією. Тоді існує керування $\tilde{u}\in G$, що переводить точку x_0 на поверхню S за час $\tilde{T}<T=\mathcal{V}(x_0,t_0)$, $\tilde{T}=\tau-t_0$. Оскільки керування u_* є оптимальним по відношенню до демпфування функції $\mathcal{V}$, то для керування $\tilde{u}$ знайдеться функція $\alpha(t)>0$, така, що

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt}=-1+\alpha(t)$$

на розв'язку $x(t,\tilde{u},x_0,t_0)$, $t\in[t_0,\tau]$. Інтегруючи останню рівність, отримуємо

$$\int_{t_0}^{\tau}\frac{d\mathcal{V}}{dt}dt=\mathcal{V}(x(\tau,\tilde{u},x_0,t_0),\tau)-\mathcal{V}(x_0,t_0)=-\mathcal{V}(x_0,t_0)=$$

$$=-(\tau-t_0)+\int_{t_0}^{\tau}\alpha(t)dt.$$

Так як $\int_{t_0}^{\tau}\alpha(t)dt\geq 0$ та $\mathcal{V}(x_0,t_0)=T$, то $\tilde{T}-T=\tau-t_1=\int_{t_0}^{\tau}\alpha(t)dt>0$. Отримали протиріччя. $\square$

9.3 Задача найшвидшого гасіння кутових швидкостей космічного апарату

Розглянемо динамічну систему вигляду

$$\mathcal{J}\frac{d\omega(t)}{dt}+\omega(t)\times\mathcal{J}\omega(t)=u(t), \tag{9.11}$$

$$\omega(0)=\omega^{(0)}, \tag{9.12}$$

яка визначає динаміку кутових швидкостей космічного апарату. Тут $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)^*$ – вектор кутової швидкості космічного апарату, $\mathcal{J}$ – додатновизначена симетрична матриця головних моментів інерції, $u=(u_1,u_2,u_3)^*$ – вектор керуючих параметрів, $u\in U\subset\mathbb{R}^3$ – множина допустимих керувань, $t\geq 0$. Зв'язана система координат будується на головних осях інерції апарату. Задача полягає в тому, щоб найшвидшим способом загасити кутові швидкості ω, тобто знайти оптимальне за швидкодією керування $u_*\in U$, що переведе стан апарату з (9.12) у

$\omega(T_*) = (0,0,0)^*$. При цьому передбачається, що пристрої керування космічним апаратом спроможні утворювати моменти, які перебільшують сумарний момент зовнішніх сил, що діють на апарат.

Для розв'язування цієї задачі використаємо метод демпфування. Розглянемо функцію

$$\mathcal{V}(t,\omega) = \frac{1}{2}\|\omega\|^2 . \tag{9.13}$$

Згідно доведеної теореми 9.1, керування $\tilde{u} \in U$, яке буде оптимальним за демпфуванням (9.13), буде також оптимальним за швидкодією керуванням, що гасить кутові швидкості космічного апарату. Знайдемо $\tilde{u} \in U$, для чого обчислимо

$$\frac{d}{dt}\mathcal{V}(t,\omega) = \omega^* \cdot \mathcal{J}^{-1} \cdot (u - \omega \times \mathcal{J}\omega) . \tag{9.14}$$

Згідно (9.14) напрямок найшвидшого спадання функції (9.13) визначається за формулою

$$v(t) = -\frac{\mathcal{J}^{-1}\omega(t)}{\|\mathcal{J}^{-1}\omega(t)\|}, \tag{9.15}$$

при $\|\omega\| > 0$. Отже, керування, що демпфує функцію (9.13) визначаємо як проекцію вектора $v(t)$ на допустиму множину U. У випадку, коли множина керувань є кулею

$$U = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 : \|z\| \le \rho \right\}, \tag{9.16}$$

керування визначаємо

$$\tilde{u}(t) = \rho v(t). \tag{9.17}$$

Якщо при цьому матриця моментів інерції володіє властивістю $\mathcal{J} = kI$, де $k > 0$, I – одинична 3×3 - матриця, то (9.17) є оптимальним за демпфуванням $\mathcal{V}(t,x)$ (а отже за швидкодією) керуванням. В протилежному випадку, керування (9.17) є наближеним до оптимального з точністю $o\left(\|\omega\|^2\right)$.

На рис. 9.1 та 9.2 представлені відповідно траєкторія та керування, обчислені при наступних значеннях параметрів: $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 40 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 2 & 0 \\ 0.02 & 0 & 40 \end{pmatrix}$, $\omega_0 = (0.4, 0.1, -0.5)^*$, $\rho = 0.01$. Тут $T_* = 61$ секунда.

Введемо додатково у розгляд обмеження на кутові швидкості

$$|\omega_i| \le d, \ i = 1,2,3, \ 0 < d < \infty. \tag{9.18}$$

Для тих $t > t_0$ та $i = 1,2,3$, для яких не справджується (9.18) визначимо

$$w_i(t) = \left\{\omega(t) \times \mathcal{J}\omega(t)\right\}_i, i = 1,2,3. \tag{9.19}$$

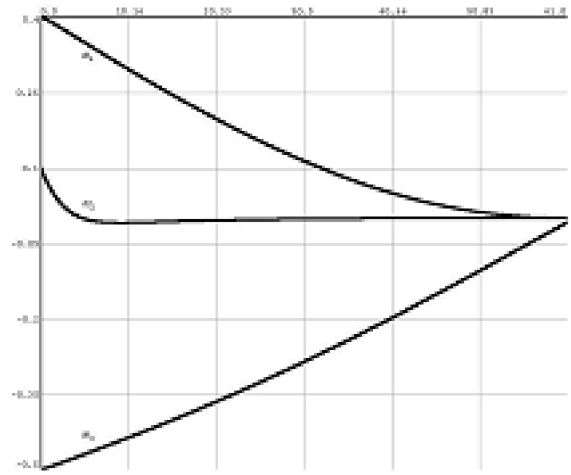

Рис. 9.1: Кутові швидкості

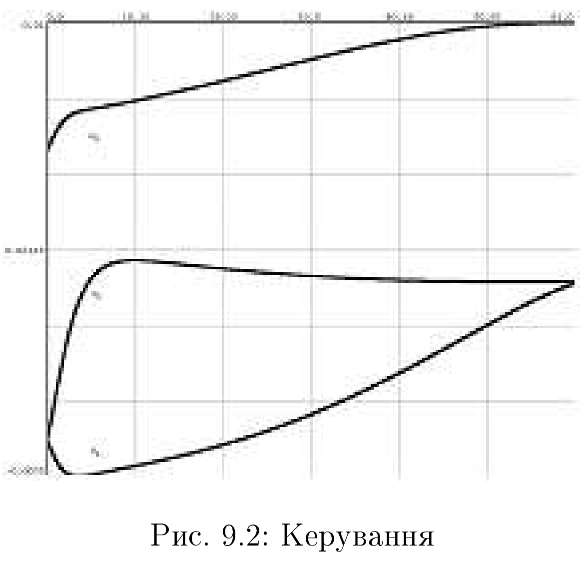

Рис. 9.2: Керування

Тоді керування покладемо

$$\tilde{u}_i(t) = \begin{cases} v_i & \text{якщо } |\omega_i| \le d, \\ w_i & \text{якщо } |\omega_i| > d. \end{cases} \tag{9.20}$$

Зауважимо, що (9.20) при $\|\omega\| \to 0$ очевидно буде задовольняти обмеженням на керування. Однак, якщо для деякого моменту часу $\bar{t} \ge t_0$ $\tilde{u}(\bar{t}) \notin U$, то замість (9.19) для відповідних компонент керування необхідно покласти таке значення, яке повністю компенсує вплив зовнішніх сил у відповідній проекції. Такий вибір керування завжди можливий, оскільки за умовою задачі пристрої керування космічним апаратом спроможні утворювати моменти, які перебільшують сумарний момент зовнішніх сил, що діють на апарат.

Література: [14, 21]

Лекція 10

Метод функцій Кротова

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – фазовий простір, $U \subseteq \mathbb{R}^r$ – простір керувань, $V \subseteq X \times U \times [t_0, T]$. Перетин V площиною $t = \bar{t}$ будемо позначати $V(\bar{t})$, проекцію $V(t)$ на X через $V_X(t)$. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \tag{10.1}$$

де $u(t)$ – кусково-неперевна вектор функція з U, $x(t) \in X$, $f(x, u, t)$– вектор функція розмірності n, неперервна за сукупністю змінних разом з частинними похідними за x та u. Множину пар $v = (x(t), u(t)) \in V(t)$, $t \in [t_0, T]$, для яких існує інтеграл

$$\int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt$$

і які задовільняють (10.1), будемо називати допустимим класом і позначати D. Нехай на D заданий функціонал

$$\mathcal{I}(x, u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x_0, x_1). \tag{10.2}$$

Тут $\Phi(x_0, x_1)$ – неперервна функція, точки $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(T)$ є нефіксованими. Задача оптимального керування системою (10.1) з функціоналом (10.2) полягає в тому, щоб знайти послідовність $\{v_s\}$, $v_s = (x_s, u_s) \in D$, таку, що

$$\mathcal{I}(v_s) \to \inf_D I, s \to \infty. \tag{10.3}$$

Нехай $\varphi(x, t)$ – неперервно-диференційована скалярна функція за винятком, можливо, скінченної кількості точок $(x, t) \in X \times [t_0, T]$. Розглянемо функцію Гамільтона-Понтрягіна

$$\mathcal{H}(x, u, p, t) = \langle p, f(x, u, t) \rangle - f_0(x, u, t), \tag{10.4}$$

де $p = (p_1, ..., p_n)^*$. Введемо функції

$$\mathcal{R}(x, u, t) = \mathcal{H}(x, u, grad_x\varphi, t) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad (10.5)$$

$$G(x_0, x_1) = \Phi(x_0, x_1) + \varphi(x_1, T) - \varphi(x_0, t_0). \qquad (10.6)$$

Позначимо

$$\mu(t) = \sup_{(x,u)\in V(t)} \mathcal{R}(x, u, t), m = \inf_{(x_0,x_1)\in V_x(t_0)\times V_x(T)} G(x_0, x_1). \qquad (10.7)$$

Тут $grad_x^*\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial\varphi}{\partial x_n})$, $V_x(t)$ – проекція множини $V(t)$ на множину X. Відносно φ будемо також припускати, що $\mathcal{R}(x, u, t)$ визначена і неперервна, а $\mu(t)$ – кусково неперервна, $t \in [t_0, T]$. Такий клас функцій φ позначимо Φ.

Зауваження. Якщо $V(t)$ – компакти, кусково неперервні за Хаусдорфом, $f(x, u, t)$ – неперервна за сукупністю змінних, то функція $\mu(t)$ буде кусково неперервною.

Теорема 10.1. *Нехай існує функція $\varphi \in \Phi$ і послідовність $\{v_s\} \subset D$, $v_s = (x_s, u_s)$, $s = 1, 2, ...$, така, що*

$$\int_{t_0}^{T} \mathcal{R}(x_s, u_s, t)dt \to \int_{t_0}^{T} \mu(t)dt, \ s \to \infty, \qquad (10.8)$$

$$G(x_{0s}, x_{1s}) \to m > -\infty, \ s \to \infty. \qquad (10.9)$$

Тоді ця послідовність мінімізує функціонал (10.2) *на D. І навпаки, будь-яка послідовність, що мінімізує* (10.2) *на D, задовольняє умовам* (10.8), (10.9).

Доведення. Позначимо

$$L(v) = G(x_0, x_1) - \int_{t_0}^{T} \mathcal{R}(x, u, t)dt,$$

$$\ell = m - \int_{t_0}^{T} \mu(t)dt.$$

Для всіх $v \in D$ має місце нерівність $L(v) \geq \ell$, але $L(v) = \mathcal{I}(v)$, $\varphi \in \Phi$, $v \in D$. Дійсно. Нехай $(x(t), u(t)) \in D$. Тоді

$$\mathcal{R}(x, u, t) = \frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t} + grad_x^*\varphi(x, t) \cdot f(x, u, t) - f_0(x, u, t) =$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + grad_x^* \varphi(x,t) \cdot \dot{x} - f_0(x,u,t) = \frac{d}{dt}\varphi(x(t),t) - f_0(x,u,t).$$

Звідси

$$L(v) = G_0(x_0, x_1) - \int_{t_0}^{T} \frac{d}{dt}\varphi(x(t),t)dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} f_0(x,u,t)dt = \Phi(x_0,x_1) + \int_{t_0}^{T} f_0(x,u,t)dt = \mathcal{I}(v)$$

Оскільки $L(v_s) \to \ell$, $s \to +\infty$, то $\ell = \inf\limits_{D} \mathcal{I}$.

Доведемо останнє твердження теореми. Припустимо, що v_s – послідовність, що мінімізує функціонал (10.2) на D, $\lim_{s\to\infty} L(v_s) = \ell$, але одна з умов (10.8), (10.9) не виконується. Тоді знайдеться $\varepsilon > 0$, таке, що

$$G(x_{0s}, x_{1s}) \geq m + \varepsilon$$

або

$$\int_{t_0}^{T} \mathcal{R}(x_s, u_s, t)dt \leq \int_{t_0}^{T} \mu(t)dt - \varepsilon,$$

$s = 1, 2, ...$, або ці нерівності виконуються одночасно. Але тоді $L(v_s) \geq \ell + \varepsilon$, що суперечить умові $L(v_s) \to \ell$, $s \to +\infty$. □

Зауваження. Умова (10.8) буде виконуватись, якщо $\mathcal{R}(x_s, u_s, t) \geq N > -\infty$ при всіх $t \in [t_0, T]$, $s = 1, 2, ...$ і $\mathcal{R}(x_s, u_s, t) \xrightarrow{\sigma} \mu(t)$, $t \in [t_0, T]$. Тут σ – міра Лебега. Дійсно, за означенням μ: $|\mathcal{R}| \leq \max\{|N|, \sup|\mu(t)|\}$, $t \in [t_0, T]$. За теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла виконується (10.8).

Означення 10.1. *Елемент $\bar{v} \in D$,такий, що $\mathcal{I}(\bar{v}) = \inf\limits_{D} \mathcal{I}$ називається мінімаллю (оптимальним елементом) на D.*

Підставивши в доведенні теореми 10.1 послідовність вигляду $x_s(t) = \bar{x}(t)$, $u_s(t) = \bar{u}(t)$ отримаємо таке твердження.

Теорема 10.2. *Нехай функція $\varphi \in \Phi$ і $\bar{v} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in D$ майже скрізь на $t \in [t_0, T]$ задовольняють умови*

$$\mathcal{R}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) = \mu(t), \tag{10.10}$$

$$G(x_0, x_1) = m. \tag{10.11}$$

Тоді $\bar{v}$ є мінімаль функціоналу (10.2) *на D. І навпаки, будь-яка мінімаль функціоналу* (10.2) *задовольняє умови* (10.10), (10.11).

Означення 10.2. *Функція $\varphi(x,t)$ в теоремах 10.1, 10.2 називаєтьcя функцією Кротова задачі* (10.1)-(10.3).

Якщо $\varphi(x,t)$ є функцією Кротова задачі (10.1)-(10.3) і $\alpha(t)$ – довільна абсолютно неперервна на $t \in [t_0, T]$ функція, то з умов теорем 10.1, 10.2 випливає, що функція $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t) + \alpha(t)$ є функцією Кротова задачі (10.1)-(10.3).

Припустимо, що в задачі (10.1)-(10.3) точка x_0 є фіксованою. Позначимо $\Phi(x_0, x_1) = \Phi(x_1)$, $G(x_1) = \Phi(x_1) + \varphi(T, x_1)$, $m = \inf\limits_{x_1 \in V_x(T)} G(x_1)$. У цьому випадку теореми 10.1, 10.2 залишаються справедливими.

Приклад 10.1. Розглянемо задачу оптимального керування: мінімізувати функціонал

$$\mathcal{I}(u) = \int_{t_0}^{T} u^2(s)ds + x_1^2$$

при умовах

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \ x(t_0) = x_0,$$

де $x \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^1$. Застосуємо для розв'язування цієї задачі метод функцій Кротова. Використавши позначення до теорем 10.1, 10.2, маємо

$$\mathcal{R}(x,u,t) = -u^2 + u\tfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

$$G(x_1) = \varphi(x_1, T) + x_1^2.$$

За теоремою 10.2

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u} = -2u + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} = u\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi(x_1, T)}{\partial x_1} + 2x_1 = 0.$$

Виберемо функцію Кротова у вигляді $\varphi(x,t) = c(t)x^2$, де $c(t)$ – неперервно диференційована функція. Тоді оптимальне керування $u_0(t) = c(t)x(t)$ і $c^2(t)x + c'(t)x = 0$ при $c(T) = -1$. Звідси $c(t) = \frac{1}{t-T-1}$ і $u_0(t) = \frac{x(t)}{t-T-1}$.

Між функцією Кротова і функцією Белмана існує безпосередній зв'язок. Так, у формулюванні теорем 10.1, 10.2 візьмемо замість $\varphi(x,t)$ функцію $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t) + \alpha(t)$, де $\alpha(t) = -\int_T^t \mu(\tau)d\tau - m$. Позначимо

$$\mathcal{R}_1(x,u,t) = \mathcal{H}(x,u,grad_x\varphi_1,t) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \mathcal{R}(x,u,t) - \mu(t),$$

$$G_1(x_1) = \Phi(x_1) + \varphi_1(x_1, T) = G(x_1) - m.$$

Оскільки

$$\sup_{(x,u)\in V(t)} \mathcal{R}_1(x,u,t) = 0,$$

$$\inf_{x_1 \in V_x(T)} G_1(x_1) = 0,$$

то, без обмеження загальності, у теоремах 10.1, 10.2 для випадку динамічних систем з фіксованим лівим кінцем можемо покласти $\mu(t) = 0$, $m = 0$. Враховуючи це зауваження, з теорем 10.1, 10.2 отримаємо

$$\mathcal{R}(x,u,t) = \langle grad_x \varphi(x,t), f(x,u,t)\rangle - f_0(x,u,t) + \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} \le 0, \quad (10.12)$$

$$G(x) = \Phi(x) + \varphi(x,T) \ge 0, \quad (10.13)$$

де $(x,u,t) \in V$. При цьому нерівності (10.12), (10.13) перетворюються у рівності при $x = \bar{x}(t)$, $u = \bar{u}(t)$ за теоремою 10.2, або в граничному переході $s \to \infty$ при $x = x_s(t)$, $u = u_s(t)$ за теоремою 10.1. Позначимо $a(x,t) = -\varphi(x,t)$. Тоді співвідношення (10.12), (10.13) еквівалентні

$$\langle grad_x a(x,t), f(x,u,t)\rangle + f_0(x,u,t) + \frac{\partial a(x,t)}{\partial t} \ge 0, \quad (10.14)$$

$$G(x) = \Phi(x) - a(x,T) \ge 0. \quad (10.15)$$

Отже, функція Кротова є функцією Белмана з точністю до знаку, так як диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана (2.14)-(2.15) є частинним випадком (10.14), (10.15).

Література: [9, 10, 16, 33]

Лекція 11

Фільтрація. Множинний підхід

11.1 Теорема про структуру спостерігача

Розглянемо лінійну задачу спостереження

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \tag{11.1}$$

і спостерігається вектор

$$y(t) = H(t)x(t). \tag{11.2}$$

Тут $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $y = (y_1, ..., y_m)^*$ – вектор вимірів, $A(t)$ – $n \times n$ - матриця з неперервними компонентами, $H(t)$ – $m \times n$ - матриця з неперервними компонентами. Оцінкою за вимірами називається вимірна функція від вимірів. Пристрій, який забезпечує отримання оцінок вектору стану за вимірами називається *спостерігачем. Спостерігачем* також називають динамічну систему, яка описує оцінку стану системи за вимірами.

Означення 11.1. *Система n-го порядку вигляду*

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + G(t)y(t)$$

називається спостерігачем (повного порядку) для системи (11.1), (11.2), *якщо з рівності початкових умов $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ випливає рівність розв'язків $\hat{x}(t) = x(t)$, $t \geq t_0$.*

Тут $F(t)$ – $n \times n$ - матриця з неперервними компонентами, $G(t)$ – $n \times m$ - матриця з неперервними компонентами. Говорять, що спостерігач має повний порядок у випадку, якщо його розмірність рівна n.

Теорема 11.1. *Система*

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + G(t)y(t)$$

є спостерігачем для системи (11.1), (11.2) *тоді і тільки тоді, коли*

$$F(t) = A(t) - K(t)H(t),\ G(t) = K(t),$$

де $K(t)$ *– довільна* $n \times m$ *- матриця з неперервними компонентами. У такий спосіб спостерігачі повного порядку мають структуру*

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + K(t)\left[y(t) - H(t)\hat{x}(t)\right].$$

Доведення. Необхідність. Розглянемо різницю

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A(t)x(t) - F(t)\hat{x}(t) - G(t)y(t) = \\ = A(t)x(t) - F(t)\hat{x}(t) - G(t)H(t)x(t) = \\ = \left(A(t) - G(t)H(t)\right)x(t) - F(t)\hat{x}(t).\end{aligned}$$

З $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ випливає рівність $\hat{x}(t) = x(t)$, $t \geq t_0$. Тоді

$$\left(A(t) - G(t)H(t)\right)x(t) = F(t)x(t),\ t \geq t_0.$$

Виберемо довільну матрицю $K(t)$ і з умови $G(t) = K(t)$ маємо

$$\left(A(t) - K(t)H(t)\right)\Theta(t,t_0)x(t_0) = F(t)\Theta(t,t_0)x(t_0).$$

Тут $\Theta(t,t_0)$ – фундаментальна матриця системи $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$, нормована за моментом t_0. В силу довільності $x(t_0)$ одержуємо рівність $F(t) = A(t) - K(t)H(t)$.

Достатність. Якщо має місце умова

$$F(t) = A(t) - K(t)H(t),\ G(t) = K(t),$$

де $K(t)$ – довільна $n \times m$ - матриця, то

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x(t) - \hat{x}(t)\right) = \\ = A(t)x(t) - (A(t) - K(t)H(t))\hat{x}(t) - K(t)y(t).\end{aligned}$$

Підставляємо співвідношення (11.2) в останню рівність.

$$\frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\hat{x}(t)}{dt} =$$
$$= A(t)x(t) - (A(t) - K(t)H(t))\hat{x}(t) - K(t)H(t)x(t) =$$
$$= (A(t) - K(t)H(t))\,(x(t) - \hat{x}(t))\,.$$

Отже, отримали однорідну систему

$$\frac{dz(t)}{dt} = (A(t) - K(t)H(t))\,z(t)$$

відносно $z(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Якщо $z(t_0) = x(t_0) - \hat{x}(t_0) = 0$, то

$$z(t) = x(t) - \hat{x}(t) = 0,\ t \geq t_0.$$

□

Матрицю $K(t)$ називають *матрицею коефіцієнтів підсилення спостерігача.* Величина $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ називається *помилкою оцінювання.*

11.2 Чебишевський центр

Для будь-якої непорожньої замкненої обмеженої множини A, що лежить в $\mathbb{R}^n$ визначимо число

$$\rho\,(A) = \inf\left\{r \geq 0 : \exists x \in \mathbb{R}^n\ A \subseteq K_r\,(x)\right\},$$

де $K_r\,(x)$ – замкнена куля радіусу r з центром в точці x. Тобто, $\rho\,(A)$ дорівнює радіусу найменшої кулі, що містить множину A.

Означення 11.2. *Чебишевським центром множини A називається точка $c\,(A) \in \mathbb{R}^n$, яка задовольняє включенню*

$$A \subseteq K_{\rho(A)}\,(c\,(A))\,.$$

Отже, чебишевський центр множини A є точкою з простору $\mathbb{R}^n$ такою, що існує куля найменшого радіусу з центром в чебишевському центрі, яка містить цю множину.

Приклад 11.1. Чебишевським центром відрізка $A = [a, b]$, $a \neq b$ є середина цього відрізка $c\,(A) = \frac{a+b}{2}$. Зрозуміло, що $c\,(A) \in [a, b]$. Точка $c = \frac{a+b}{2}$ є чебишевським центром двоточкової множини $\{a, b\}$, але $c \notin \{a, b\}$.

Приклад 11.2. Якщо $A = K_r(a)$, то за означенням чебишевського центру $c(A) = a$, $r = \rho(A)$.

Мають місце такі твердження [20].

Лема 11.1 (про існування та єдиність чебишевського центру)**.** *Для довільної замкненої обмеженої непорожньої опуклої множини $A \subset \mathbb{R}^n$ існує чебишевський центр $c(A) \in \mathbb{R}^n$ і він є єдиним.*

Лема 11.2. *Чебишевський центр опуклої замкненої обмеженої множини $A \subset \mathbb{R}^n$ є розв'язком екстремальної задачі*

$$\min_{a \in A} g(a),$$

де $g(a) = \sup_{x \in A} \|x - a\|^2$. Крім того, чебишевський центр є розв'язком такої екстремальної задачі $\min_{a \in \mathbb{R}^n} g(a)$. Тобто,

$$g(c(A)) = \min_{a \in A} g(a) = \min_{a \in \mathbb{R}^n} g(a).$$

Наслідок. Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$ – замкнена обмежена непорожня опукла множина. Тоді чебишевський центр $c(A) \in A$.

Приклад 11.3. Нехай

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle Q(x - x_0), x - x_0 \rangle \leq r^2 \right\},$$

Тут Q – додатновизначена симетрична матриця розмірності $n \times n$. Точка $c(A) = x_0$ є чебишевським центром узагальненого еліпсоїда A, при цьому

$$\rho(A) = \frac{r}{\sqrt{\lambda_*(Q)}},$$

де $\lambda_*(Q)$ – максимальне власне число матриці Q.

11.3 Задача фільтрації і множинний підхід

Розглянемо систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) + c(x(t), t)v(t), \tag{11.3}$$

$$y(t) = g(x(t), t) + w(t), \tag{11.4}$$

де $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $y = (y_1, ..., y_m)^*$ – вектор спостережень, $f(x, t)$ – n-вимірна вектор-функція, $c(x, t)$ – $n \times k$-матриця,

$g(x,t)$ – m-вимірна вектор-функція. Зазначені функції є неперервними за сукупністю змінних, $v(t) = (v_1(t), ..., v_k(t))^*$, $w(t) = (w_1(t), ..., w_m(t))^*$ – невідомі шуми, які є інтегрованими функціями, $t \in [t_0, T]$, при цьому права частина системи (11.3) задовольняє умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші та умови продовжуваності розв'язку [23], $x(\cdot) = x(\cdot, v, x_0, t_0)$ – розв'язок системи (11.3) за умови $x(t_0) = x_0$ при фіксованому $v = v(t)$. Крім невідомих шумів $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ є невідомими також початкові умови $x(t_0) = x_0$, вони є обмеженими за допомогою нерівності

$$\int_{t_0}^{\tau} \psi(v(t), w(t), t)dt + \varphi(x_0) \le \mu^2, \tag{11.5}$$

де $\psi(v, w, t)$, $\varphi(x)$ – невід'ємні неперервні функції, $\mu > 0$, $\tau \in [t_0, T]$.

Мета задачі фільтрації полягає у такому:

1. визначити оцінку $\hat{x}(\tau)$ стану $x(\tau)$ системи (11.3), (11.4) на основі відомої інформації про виміри $y(t)$, $t \in [t_0, \tau]$ і обмеження (11.5);

2. побудувати динамічну систему, що описує динаміку оцінки $\hat{x}(\tau)$ і називається *фільтром*;

3. знайти похибку оцінювання оцінки $\hat{x}(\tau)$ і описати її динаміку.

Нехай $y = y_*(t)$ – відомий вектор спостережень на відрізку $t \in [t_0, \tau]$. Позначимо $\mathcal{X}(\cdot)$ множину розв'язків $x(\cdot) = x(\cdot, v, x_0, t_0)$ системи (11.3), таких, що задовольняють співвідношення (11.4) при $y(t) = y_*(t)$ і деякому $w = w(t)$, $t \in [t_0, \tau]$, причому виконуються обмеження (11.5). Тобто, якщо $x(\cdot) = x(\cdot, v, x_0, t_0) \in \mathcal{X}(\cdot)$, то знайдеться вимірний шум $w = w(t)$ такий, що $y_*(t) = g(x(t, v, x_0, t_0), t) + w(t)$, причому виконується нерівність (11.5). Тоді множина

$$\mathcal{X}(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^n : z = x(\tau), x(\cdot) \in \mathcal{X}(\cdot)\}$$

називається *інформаційною областю* в момент $t = \tau$, що узгоджена з вимірами $y = y_*(t)$, $t \in [t_0, \tau]$ при обмеженнях (11.5).

Отже, інформаційна область $\mathcal{X}(\tau)$ системи (11.3), (11.4) в момент $t = \tau$ складається з усіх станів системи (11.3) в момент $t = \tau$, що узгоджуються з заданими вимірами $y = y_*(\cdot)$ в силу (11.4), при цьому справджується обмеження (11.5) на початковий стан x_0 і шуми $v(\cdot)$, $w(\cdot)$.

Підхід полягає у тому, що оцінка $\hat{x}(\tau)$ стану системи (11.3), (11.4) вибирається як *чебишевський центр інформаційної області* $\mathcal{X}(\tau)$, тобто, як центр найменшої кулі, що містить $\mathcal{X}(\tau)$. Якщо область $\mathcal{X}(\tau)$ опукла, то $\hat{x}(\tau) \in \mathcal{X}(\tau)$.

11.4 Задача лінійної фільтрації

Нехай задана система

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)v(t), \tag{11.6}$$

$$y(t) = G(t)x(t) + w(t), \tag{11.7}$$

де $A(t)$, $C(t)$, $G(t)$ є матрицями з неперервними компонентами розмірностей $n \times n$, $n \times k$ і $m \times n$ відповідно. Початковий стан x_0 і шуми $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ задовольняють обмеженням вигляду

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{\tau} \{\langle M(t)\left(v(t) - v_0(t)\right), v(t) - v_0(t)\rangle + \\
&+ \langle N(t)\left(w(t) - w_0(t)\right), w(t) - w_0(t)\rangle\} \, dt + \\
&+ \langle P_0\left(x_0 - a\right), x_0 - a\rangle \leq \mu^2.
\end{aligned} \tag{11.8}$$

Тут $M(t)$, P_0 є додатновизначеними симетричними матрицями розмірності $k \times k$ і $n \times n$ відповідно, $N(t)$ є невід'ємновизначеною симетричною матрицею розмірності $m \times m$. Матриці $N(t)$, $M(t)$ є неперервними за $t \in [t_0, T]$. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ є заданою. Функції $v_0(\cdot)$, $w_0(\cdot)$ є заданими інтегрованими з квадратом на $[t_0, \tau]$ функціями, $v_0(t) \in \mathbb{R}^k$, $w_0(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [t_0, \tau]$. Шуми $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ належать класу інтегрованих з квадратом на $[t_0, \tau]$ функцій.

З співвідношення (11.7) виразимо $w(t) = y(t) - G(t)x(t)$ і підставимо в (11.8). Отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{\tau} \{\langle M(t)\left(v(t) - v_0(t)\right), v(t) - v_0(t)\rangle + \\
&+ \langle N(t)\left(y(t) - w_0(t) - G(t)x(t)\right), y(t) - w_0(t) - G(t)x(t)\rangle\} \, dt + \\
&+ \langle P_0\left(x_0 - a\right), x_0 - a\rangle \leq \mu^2.
\end{aligned} \tag{11.9}$$

Тоді за означенням інформаційна область системи (11.6), (11.7) при обмеженнях (11.8) співпадає з множиною досяжності системи (11.6) при обмеженнях (11.9), де функція $v(\cdot)$ розглядається як керування системою (11.6) (означення 3.1, стор. 51). Тоді за теоремою про зв'язок між функцією Белмана і множиною досяжності (теорема 3.2, стор. 52) інформаційна область $\mathcal{X}(\tau)$ може бути записана як множина рівня функції Белмана $\mathcal{B}(z, \tau)$ задачі оптимального керування системою (11.6) з критерієм якості

$$\mathcal{I}(v,x) = \int_{t_0}^{T} \left\{ \langle M(t)\left(v(t)-v_0(t)\right), v(t)-v_0(t)\rangle + \right.$$
$$+ \langle N(t)\left(y(t)-w_0(t)-G(t)x(t)\right), y(t)-w_0(t)-G(t)x(t)\rangle \} \, dt +$$
$$+ \langle P_0\left(x_0-a\right), x_0-a\rangle \to \inf,$$

де $t \in [t_0, T]$, $\tau \in [t_0, T]$. Тобто, має місце рівність

$$\mathcal{X}(\tau) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \mathcal{B}(z,\tau) \le \mu^2 \right\}. \tag{11.10}$$

Така функція Белмана $\mathcal{B}(z,\tau)$ називається *інформаційним станом* системи (11.6), (11.7) при обмеженнях (11.8) і при заданих спостереженнях $y = y_*(t)$, $t \in [t_0, \tau]$. Має місце така теорема.

Теорема 11.2. *Оцінка стану $\hat{x}(\tau)$ системи* (11.6), (11.7) *при обмеженнях* (11.8) *при заданих спостереженнях $y(t) = y_*(t)$, $t \in [t_0, \tau]$ задовольняє системі*

$$\begin{aligned} &\frac{d\hat{x}(s)}{ds} = A(s)\hat{x}(s) + R(s)G^*(s)N(s)\left(y(s)-w_0(t)-G(s)\hat{x}(s)\right) + \\ &+ C(s)v_0(s), \ \hat{x}(t_0) = a. \end{aligned} \tag{11.11}$$

Інформаційний стан системи виражається співвідношенням

$$\mathcal{B}(z,\tau) = \langle P(\tau)\left(z-\hat{x}(\tau)\right), z-\hat{x}(\tau)\rangle + k(\tau), \tag{11.12}$$

а інформаційна область записується у формі еліпсоїда

$$\mathcal{X}(\tau) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle P(\tau)\left(z-\hat{x}(\tau)\right), z-\hat{x}(\tau)\rangle \le \mu^2 - k(\tau) \right\}. \tag{11.13}$$

Тут

$$\begin{aligned} &\frac{dP(s)}{ds} + P(s)A(s) + A^*(s)P(s) + \\ &+ P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s) = G^*(s)N(s)G(s), \\ &P(t_0) = P_0, \end{aligned} \tag{11.14}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dR(s)}{ds} = A(s)R(s) + R(s)A^*(s) + \\ &+ C(s)M^{-1}(s)C^*(s) - R(s)G^*(s)N(s)G(s)R(s), \\ &R(t_0) = P_0^{-1}, \ s \in [t_0, \tau], \end{aligned} \tag{11.15}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dk(s)}{ds} = \\ &= \langle N(s)\left(y(s)-w_0(t)-G(s)\hat{x}(s)\right), y(s)-w_0(t)-G(s)\hat{x}(s)\rangle, \\ &k(t_0) = 0, \ s \in [t_0, \tau]. \end{aligned} \tag{11.16}$$

Доведення. Оцінка стану $\hat{x}(\tau)$ вибирається як чебишевський центр інформаційної множини. Згідно співвідношення (11.12) інформаційна множина визначається через функцію Белмана, яка має вигляд (стор. 46)

$$\mathcal{B}(z,\tau) = \langle P(\tau)\left(z - h(\tau)\right), z - h(\tau)\rangle + k(\tau).$$

Це означає, що інформаційна множини має еліпсоїдальну форму і її чебишевський центр співпадає з $h(\tau)$. Функція $h(\tau)$ задовольняє співвідношення (11.11), (11.15). $\square$

Помилка оцінювання $e(\tau) = x(\tau) - \hat{x}(\tau)$ належить $\Omega(\tau) = \mathcal{X}(\tau) - \hat{x}(\tau)$. Для задачі (11.6) - (11.7) множина

$$\Omega(\tau) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle P(\tau)z, z\rangle \leq \mu^2 - k(\tau) \right\}.$$

Чим більшою за включенням є $\Omega(\tau)$, тим гіршим є випадок вимірювання. Оцінимо норму похибки

$$\begin{aligned}\|e(\tau)\| = \|x(\tau) - \hat{x}(\tau)\| \leq \max_{z\in\Omega(\tau)} \|z\| = \\ = \sqrt{\mu^2 - k(\tau)} \max_{\psi\in S} \sqrt{\langle P^{-1}(\tau)\psi, \psi\rangle} = \\ = \sqrt{\mu^2 - k(\tau)} \max_{\psi\in S} \sqrt{\langle R(\tau)\psi, \psi\rangle} = \sqrt{\lambda_*(R(\tau))}\sqrt{\mu^2 - k(\tau)}.\end{aligned}$$

Тут $S = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| = 1\}$, $\lambda_*(R(\tau))$ – максимальне власне число матриці $R(\tau)$ [1]. Величина

$$\Delta = \sqrt{\lambda_*(R(\tau))}\sqrt{\mu^2 - k(\tau)}$$

визначає *похибку оцінювання.* Вона обчислюється за допомогою (11.15) і (11.16). Аналогічний до (11.11) фільтр, який одержаний у випадку випадкових шумів типу білого шуму, називається *оптимальним фільтром Калмана-Б'юсі* [8].

Рекомендована література: [1, 7, 8, 20, 31]

[1]Тут застосоване співвідношення Релея [4].

Література

[1] Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. – М.: Физматлит, 2005. – 276 с.

[2] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.

[3] Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. -К.: Київський університет. -2008. – 383 с.

[4] Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983. – 336 с.

[5] Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. – М.: Высшая школа, 2001. – 239 с.

[6] Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.

[7] Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К.: Вища школа, 1975. – 328 с.

[8] Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. – М.: Наука, 1982. – 200 с.

[9] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. –М.: Наука, 1980. – 520 с.

[10] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

[11] Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Вступ до аналізу та оптимізації структурно заданих систем: Навчальний посібник. – К.: Київський університет, 2003. – 113 с.

[12] Гаращенко Ф.Г., Пичкур В.В., Харченко И.И. Оптимальное по быстродействию гашение угловых скоростей космического аппарата на основе метода динамического программирования // Кибернетика и вычислительная техника. – 2002. – Вып.134. –С.51-59.

[13] Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.

[14] Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.

[15] Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. – К.: Выща школа, 1978. – 184 с.

[16] Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. -М.: Наука, 1973. – 446 с.

[17] Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

[18] Михалевич В. С., Кукса А. И. Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах оптимального распределения ресурсов. – М.:Наука, 1983. – 208 с.

[19] Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975. – 528 с.

[20] Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2004. – 416 с.

[21] Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. – М.: Наука, 1974. – 600 с.

[22] Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. – Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 336 с.

[23] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. –М.: Наука, 1985. – 224 с.

[24] Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978. – 316 с.

[25] Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. – М.: Наука, 1977. – 248 с.

[26] Bardi M., Capuzzo Dolcetta I. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations. – Boston: Birkhäuser, 1997. – 570 p.

[27] Bellman R. Dynamic Programming. – Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957. – 363 p.

[28] Bellman R. Introduction to the mathematical theory of control processes. Vol.1. – New York, London: Academic Press, 1967. – 263 p.

[29] Bellman R. Introduction to the mathematical theory of control processes. Vol.2. – New York, London: Academic Press, 1971. – 327 p.

[30] Evans L.C. Partial differential equations. – American Mathematical Society, 1998. – 662 p.

[31] Kurzhanski A., Vályi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. – Boston: IIASA and Birkhäuser, 1997. – 321 p.

[32] Kirk D.E. Optinal control theory. An introduction. – Mineola, New York: Dover, 2004. – 452 p.

[33] Krotov V.F. Global methods in optimal control theory. – New York: Marcel Dekker, 1996. – 408 p.